



Politechnika Wroclawska

**Sprężysto-plastyczne zginanie
symetrycznej
płyty przekładkowej**

Autorzy: Kazimierz Myślecki, Jakub Lewandowski

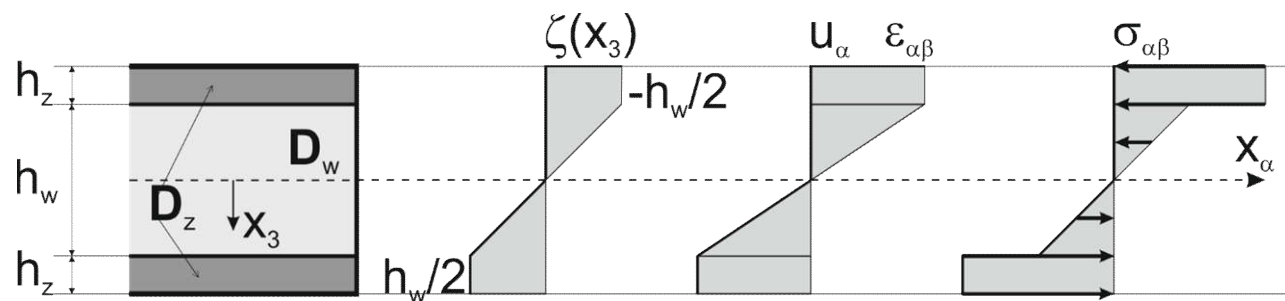




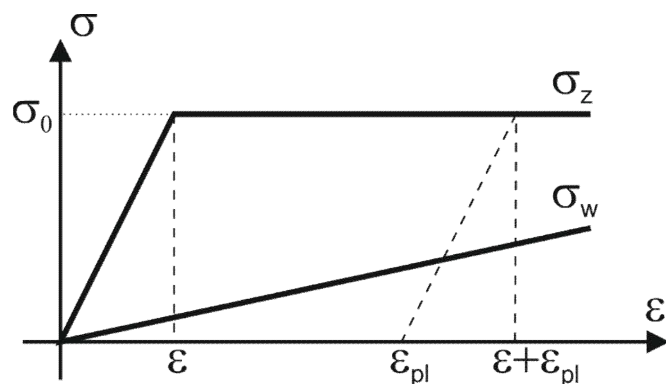
Plan prezentacji

1. Model płyty trójwarstwowej
2. Sformułowanie w ujęciu MES
3. Warunek plastyczności
4. Funkcjonał i równanie MES
5. Algorytm rozwiązania
6. Przykłady

Model płyty trójwarstwowej



- okładziny: materiał idealnie sprężysto-plastyczny, płaski stan naprężenia
- rdzeń: materiał sprężysty, płyta Reissnera-Mindlina



$$\sigma_z = D_z \varepsilon_z, \quad \varepsilon_z = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}]^T$$

$$\sigma_w = D_w \varepsilon_w, \quad \varepsilon_w = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{23}]^T$$



Sformułowanie w ujęciu MES

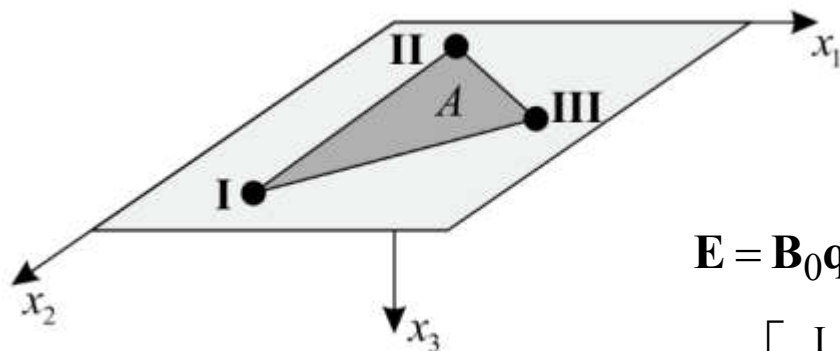
Przemieszczenia i odkształcenia w płycie

$$u_\alpha = \zeta \varphi_\alpha, \quad u_3 = w \rightarrow \kappa_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha,\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \zeta \kappa_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\varphi_\alpha + w_{,\alpha}) = \frac{1}{2} \gamma_\alpha$$

Momenty i siły tnące

$$M_{\alpha\beta} = \left(\frac{h_w^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\delta}^w + 2 \left(\frac{h_w}{2} \right)^2 h_z C_{\alpha\beta\gamma\delta}^z \right) \kappa_{\gamma\delta}$$

$$T_\alpha = (h_w C_{\alpha 3 \beta 3}^w) \gamma_\beta$$



$$\Sigma = [M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12} \quad T_1 \quad T_2]^T$$

$$\mathbf{E} = [\kappa_{11} \quad \kappa_{22} \quad 2\kappa_{12} \quad \gamma_1 \quad \gamma_2]^T$$

$$\Sigma = \mathbf{D}\mathbf{E}$$

Przyjmując liniowe funkcje kształtu

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q}$$

$$\mathbf{q} = [\varphi_1^I \quad \varphi_2^I \quad w^I \quad \varphi_1^II \quad \varphi_2^II \quad w^II \quad \varphi_1^III \quad \varphi_2^III \quad w^III]^T$$



Sformułowanie w ujęciu MES

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \frac{b_I}{2A} & 0 & 0 & \frac{b_{II}}{2A} & 0 & 0 & \frac{b_{III}}{2A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_I}{2A} & 0 & 0 & \frac{c_{II}}{2A} & 0 & 0 & \frac{c_{III}}{2A} & 0 \\ \frac{c_I}{2A} & \frac{b_I}{2A} & 0 & \frac{c_{II}}{2A} & \frac{b_{II}}{2A} & 0 & \frac{c_{III}}{2A} & \frac{b_{III}}{2A} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{b_I}{2A} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{b_{II}}{2A} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{b_{III}}{2A} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{c_I}{2A} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{c_{II}}{2A} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{c_{III}}{2A} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E_w h_w^3}{12(1-\nu_w^2)} + \frac{E_z h_w^2 h_z}{2(1-\nu_z^2)} & \frac{\nu_w E_w h_w^3}{12(1-\nu_w^2)} + \frac{\nu_z E_z h_w^2 h_z}{2(1-\nu_z^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_w E_w h_w^3}{12(1-\nu_w^2)} + \frac{\nu_z E_z h_w^2 h_z}{2(1-\nu_z^2)} & \frac{E_w h_w^3}{12(1-\nu_w^2)} + \frac{E_z h_w^2 h_z}{2(1-\nu_z^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_w h_w^3}{12} + \frac{G_z h_w^2 h_z}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_w h_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_w h_w \end{bmatrix}, \text{ gdzie}$$

$$G_w = \frac{E_w}{2(1+\nu_w)}$$

$$G_z = \frac{E_z}{2(1+\nu_z)}$$



Warunek plastyczności

Okładziny - warunek plastyczności Hubera-Misesa

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_z) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_z^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}_z - 2\sigma_0^2 = 0, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Związek odkształceń okładziny-rdzeń; naprężenia

$$\begin{cases} \boldsymbol{\kappa} = [\kappa_{11} & \kappa_{22} & 2\kappa_{12}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z = [\varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{12}]^T = \frac{h_w}{2} \boldsymbol{\kappa} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_z = \frac{h_w}{2} \mathbf{D}_z \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\sigma}_w = \mathbf{D}_w (x_3 \boldsymbol{\kappa} + x_3 \boldsymbol{\kappa}_{pl}) \end{cases}$$

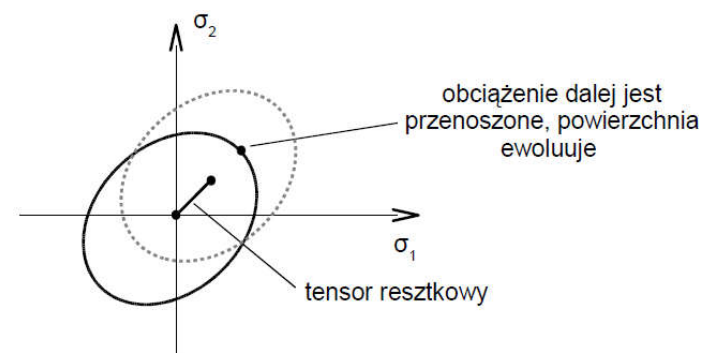
Po przekształceniach można uzyskać warunek plastyczności w płycie wyrażony przy pomocy momentów $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{11} \quad \mathbf{M}_{22} \quad \mathbf{M}_{12}]^T$

$$\Phi(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi}_2 \mathbf{M} - 2\boldsymbol{\kappa}_{pl}^T \mathbf{D}_{whp} \mathbf{M} + \boldsymbol{\kappa}_{pl}^T \mathbf{D}_{whp} 2\boldsymbol{\kappa}_{pl} \right) - 2\sigma_0^2 = 0$$

Warunek plastycznosci

$$\Phi(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi}_2 \mathbf{M} - 2 \boldsymbol{\kappa}_{pl}^T \mathbf{D}_{whp} \mathbf{M} + \boldsymbol{\kappa}_{pl}^T \mathbf{D}_{whp} 2 \boldsymbol{\kappa}_{pl} \right) - 2 \sigma_0^2 = 0$$

$$\text{gdzie} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_{wh} = \frac{h_w^3}{12} \mathbf{D}_w \\ \mathbf{D}_s = \frac{h_w h_z}{2} (h_w + h_z) \mathbf{D}_z + \mathbf{D}_{wh} \\ \boldsymbol{\Psi}_2 = \left(\frac{h_w}{2} \right)^2 \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{D}_z \boldsymbol{\Psi} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_s^{-1} \\ \mathbf{D}_{whp} = \mathbf{D}_{wh} \boldsymbol{\Psi}_2 \\ \mathbf{D}_{whp} 2 = \mathbf{D}_{wh} \boldsymbol{\Psi}_2 \mathbf{D}_{wh} \end{array} \right.$$



Łodygowski T., Metody Komputerowe II, Alma Mater, 2004/2005



Funkcjonał i równanie MES

Zmodyfikowany funkcyjonał Hu-Washizu, forma przyrostowa

$$\Pi(\Sigma, \mathbf{E}, \mathbf{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^N)^T \mathbf{D}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^N) A - (\Delta \mathbf{f})^T \mathbf{q} - (\Sigma - \Sigma^N)^T (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{pl} - \mathbf{B}\mathbf{q}) A - \lambda \Phi(\Sigma) A$$

Σ - wektor momentów i sił poprzecznych

\mathbf{E} - wektor uogólnionych odkształceń

\mathbf{q} - wektor przemieszczeń węzłowych

λ - mnożnik Lagrange'a związany z warunkiem plastyczności

$\Delta \mathbf{f}$ - wektor przyrostu obciążeń węzłowych

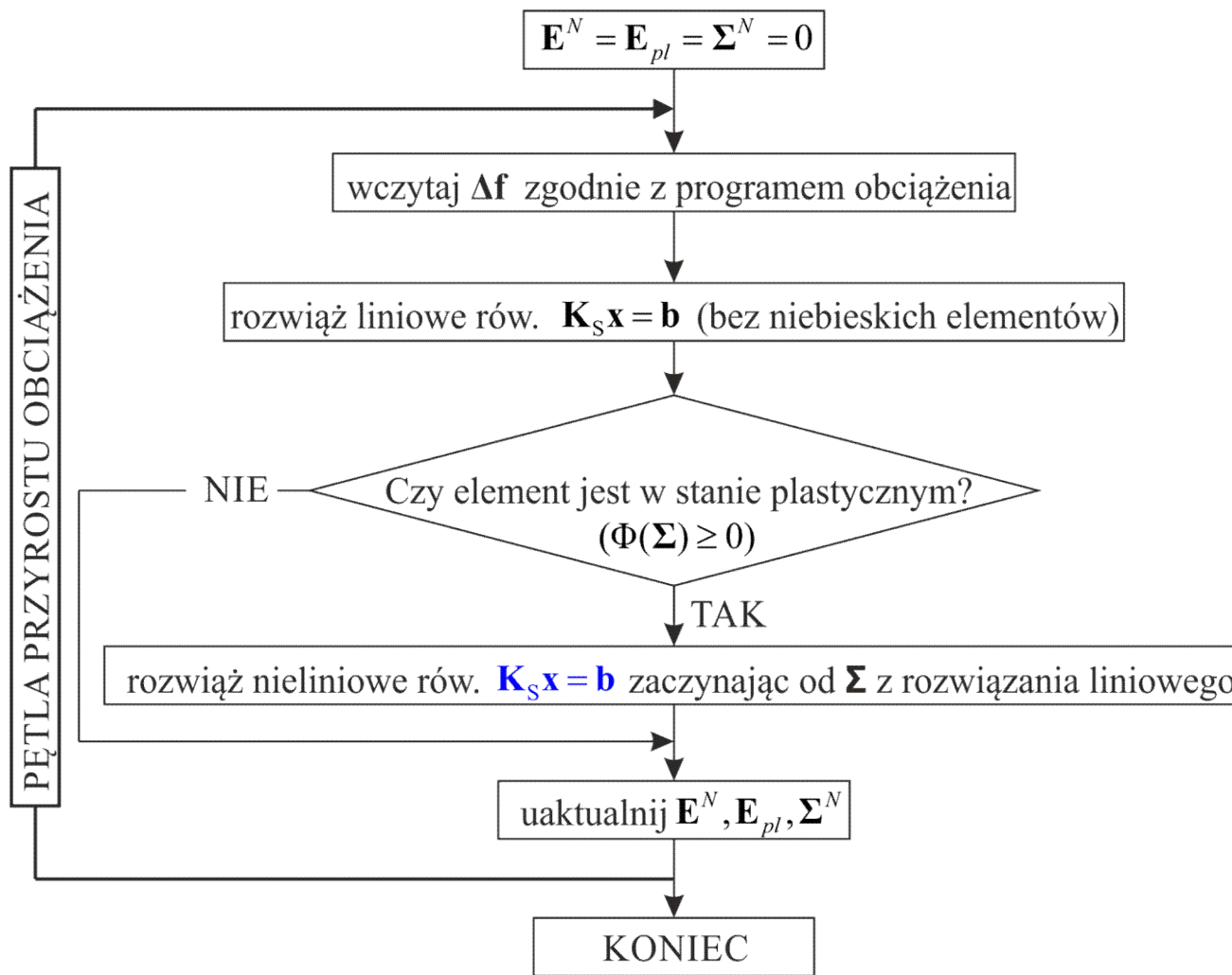
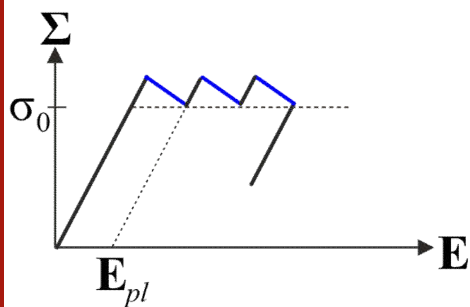
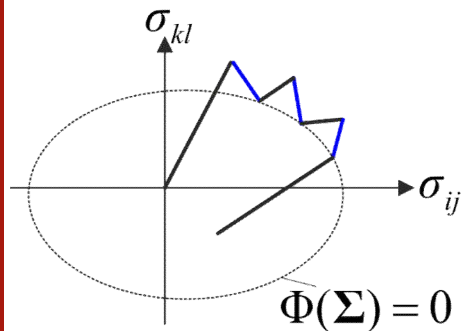
A - pole elementu skończonego

$$\mathbf{B} = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{B}_0 dA$$

$$\text{Równanie MES: } \delta \Pi = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}^T A & 0 \\ 0 & \mathbf{D}A & -\mathbf{I}A & 0 \\ \mathbf{B}A & -\mathbf{I}A & \mathbf{K}_S^{\Sigma\Sigma} & \mathbf{K}_S^{\Sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{\lambda\Sigma} & \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{E} \\ \Sigma \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f} + \mathbf{B}^T \Sigma^N A \\ (\mathbf{D}\mathbf{E}^N - \Sigma^N) A \\ \mathbf{E}_{pl}^N A \\ b^\lambda \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{K}_S \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Algorytm MES





Przykłady - belka

$$E_z = 100 \text{ GPa}$$

$$\nu_z = 0$$

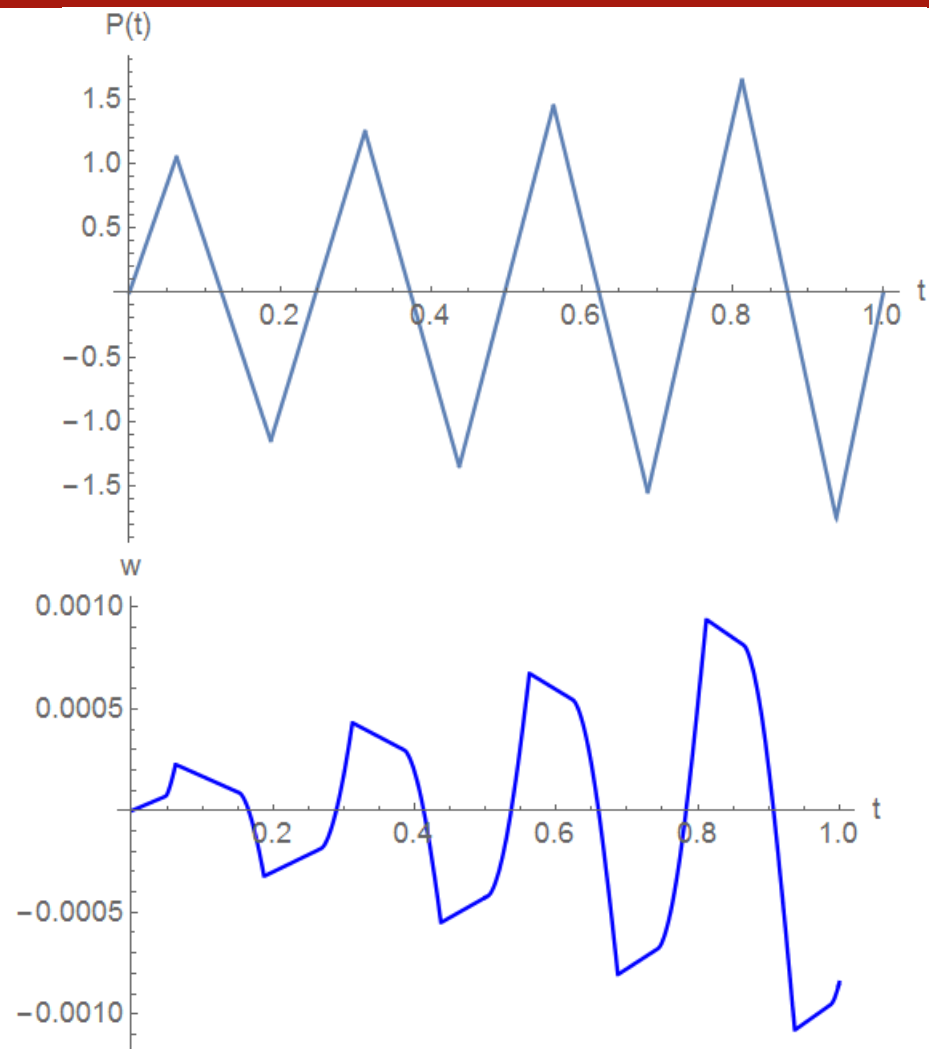
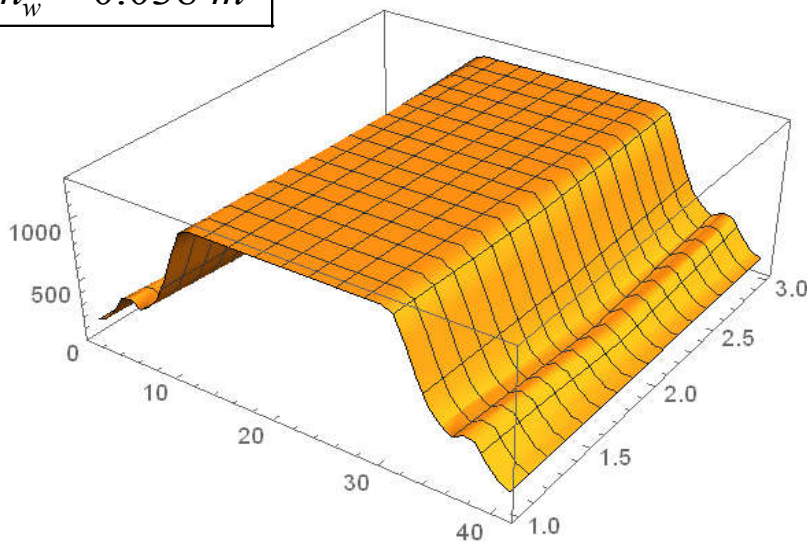
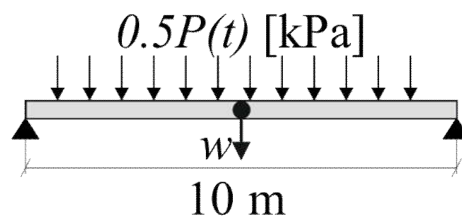
$$h_z = 0.001 \text{ m}$$

$$\sigma_0 = 1.2 \text{ MPa}$$

$$E_w = 1 \text{ GPa}$$

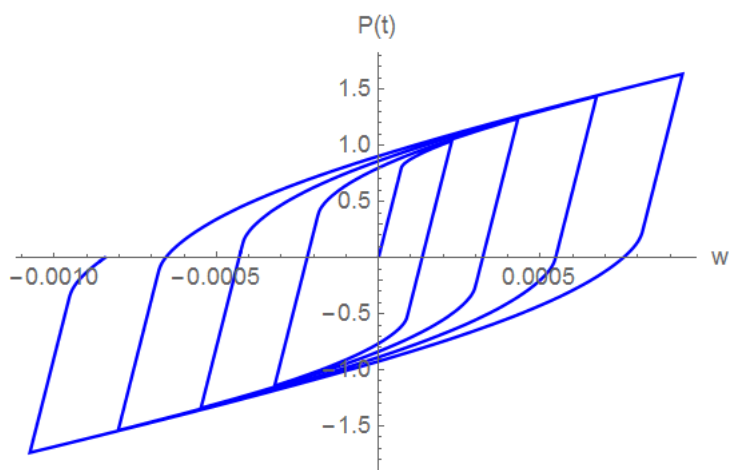
$$\nu_w = 0$$

$$h_w = 0.038 \text{ m}$$

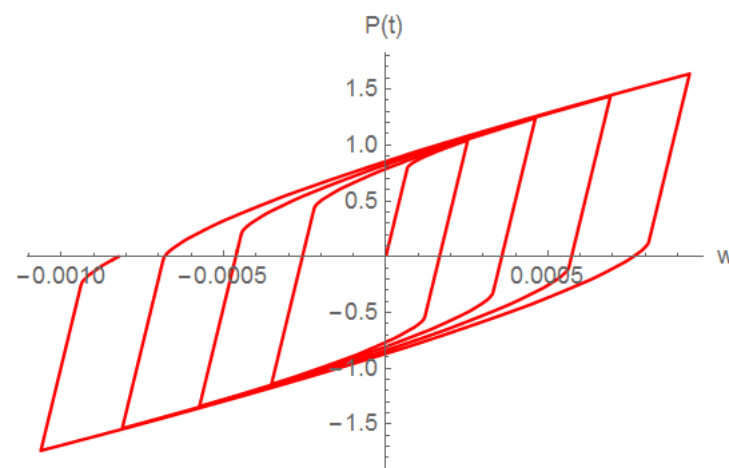




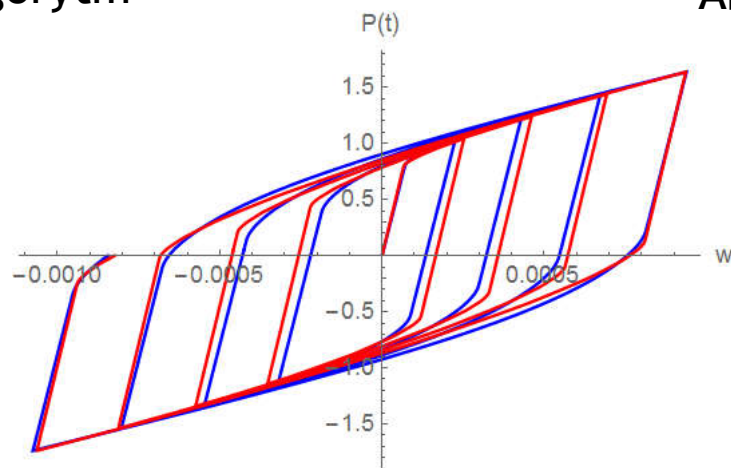
Przykłady - belka



własny algorytm

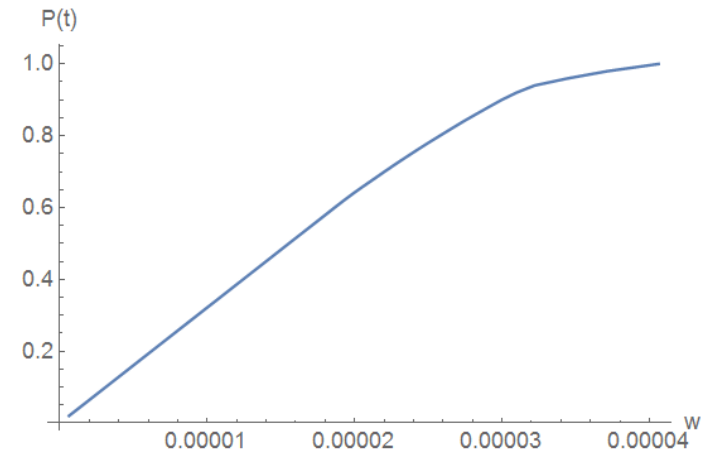
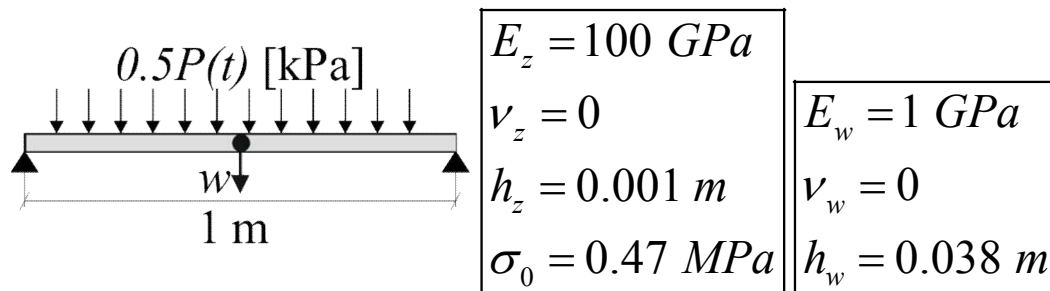


Abaqus

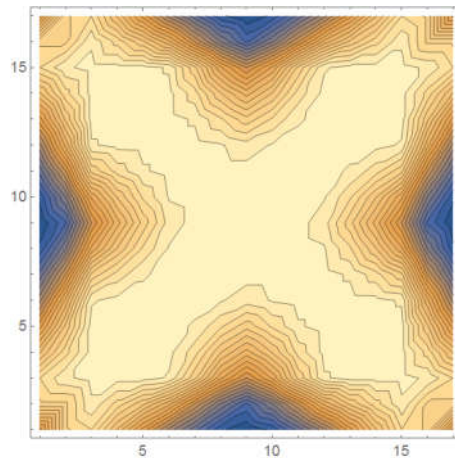




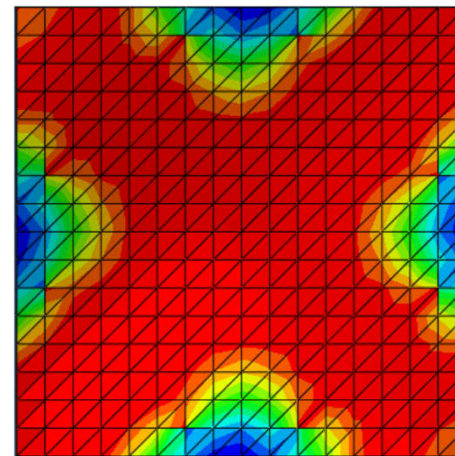
Przykłady - płyta swobodnie podparta



Rozkład stref plastycznych

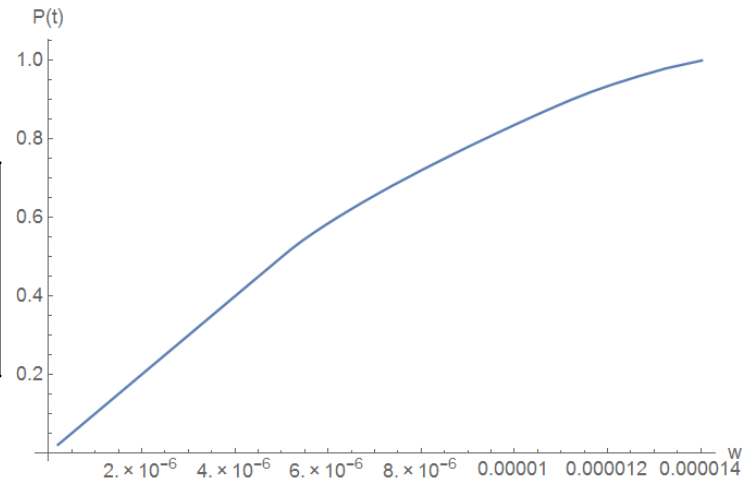
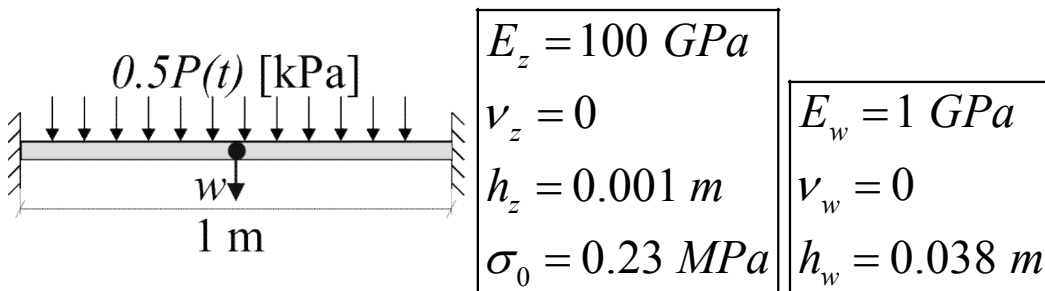


własny algorytm

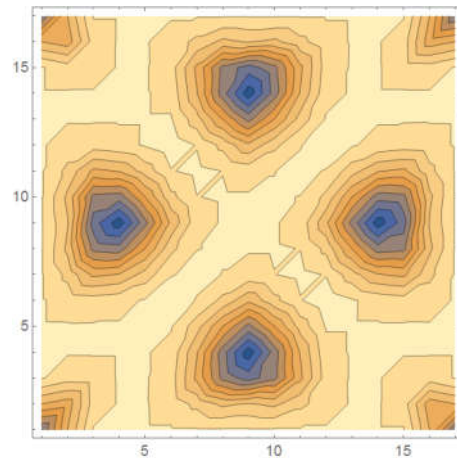


Abaqus

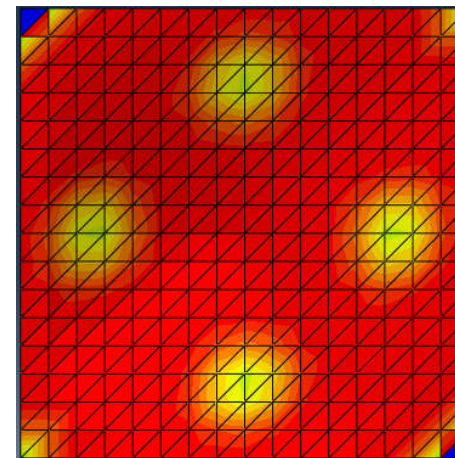
Przykłady - płyta utwierdzona



Rozkład stref plastycznych



własny algorytm



Abaqus



Dziękuję za uwagę