

Algorytm MES rozwiązania zagadnienia swobodnego skręcania pręta o dowolnym przekroju

FEM algorithm applied for classical torsion theory problem for any cross-section of a rod

Lewandowski Jakub

Zakład Wytrzymałości Materiałów, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska

Opiekun naukowy: prof. dr hab. inż. Kazimierz Myślecki

Jakub.Lewandowski@pwr.edu.pl

Słowa kluczowe: metody numeryczne, naprężenia styczne, sztywność na skręcanie, Mathematica, Saint-Venant

Streszczenie

Artykuł przedstawia autorski algorytm wykorzystujący Metodę Elementów Skończonych do rozwiązania zagadnienia swobodnego skręcania pręta pryzmatycznego o dowolnym przekroju. Celem badań było zarówno matematyczne sformułowanie równań MES jak i opracowanie programu w środowisku Mathematica 10, pozwalającego na wyznaczenie rozkładu naprężeń stycznych oraz sztywności na skręcanie pręta o dowolnie zadanym jednospójnym przekroju. Zadanie to w pewnych przypadkach jest możliwe do rozwiązania w sposób ścisły, co zostało wykorzystane do weryfikacji algorytmu MES. Punktem wyjścia tego algorytmu jest funkcjonal, którego stacjonarność prowadzi do równań MES. Zastosowano trójkątne elementy skończone o liniowych funkcjach kształtu. Dzięki zależności między funkcją naprężeń a momentem skręcającym możliwe jest wyznaczenie sztywności na skręcanie przekroju, co czyni program użytecznym także z inżynierskiego punktu widzenia. Program jest dostępny na stronie internetowej autora:
zwm.pwr.wroc.pl/lewandowski/

1. Wprowadzenie.

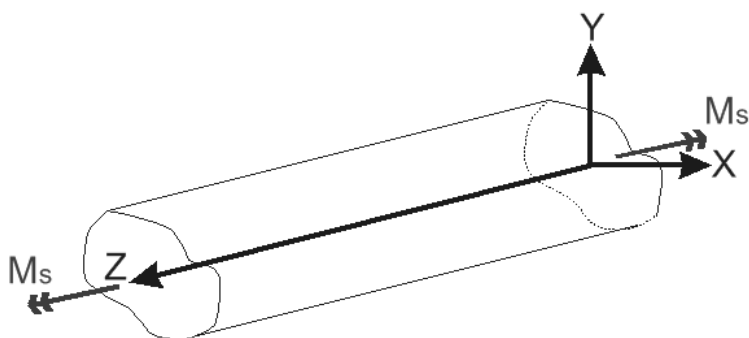
Teoria skręcania swobodnego pozwala na wyznaczenie naprężeń stycznych oraz sztywności na skręcanie dla pręta pryzmatycznego obciążonego momentem skręcającym. Ma ona zastosowanie praktyczne m.in. w budownictwie przy projektowaniu skręcanych elementów konstrukcji. Niestety rozwiązania ścisłe tej teorii dotyczą tylko niewielkiej liczby przekrojów poprzecznych, jakie może mieć pręt. Stąd istnieje potrzeba numerycznego rozwiązania tego zagadnienia. Metody te zostały już niejednokrotnie opracowane (np. Wagner i Gruttmann 2001). Głównym celem autora było jednak nie tylko przedstawienie matematycznego rozwiązania problemu, ale także opracowanie pełnego algorytmu o zastosowaniu inżynierskim, tzn. takiego, który pozwala użytkownikowi wyznaczyć

sztywność na skręcanie i naprężenia styczne bez szczegółowej wiedzy na temat podstaw fizyczno-matematycznych zagadnienia. W tym sensie program stanowi oryginalną całość, ponieważ zawiera zestaw własnych procedur zaimplementowanych w środowisku Mathematica 10, od sposobu wprowadzenia geometrii przekroju aż po prezentację wyników.

2. Ograniczenia stosowalności programu. Podstawy matematyczne zagadnienia.

Teoria skręcania swobodnego ogranicza się do przekrojów zwartych. Oznacza to, że przekroje cienkościenne muszą być liczone według innej teorii. W tej pracy przedmiotem badań są tylko przekroje jednospójne, tzn. takie, które nie zawierają otworów, a ich geometrię stanowi jeden zamknięty kontur. Możliwe jest także opracowanie algorytmów dla przekrojów z otworami, co zostało skomentowane w rozdziale Podsumowanie. Wykorzystując program, należy pamiętać o innych założeniach samej teorii skręcania swobodnego, jak zasada de Saint-Venanta czy swoboda deplanacji przekroju. Założenia te nie występują w szczególności w strefach przypodporowych pręta.

Podstawy teorii omawia klarownie Gawęcki (2003). Poniżej został przedstawiony jedynie układ równań, który jest bazą do opracowania rozwiązania MES. Ogólnie, rozważany jest pryzmatyczny pręt obustronnie obciążony (na końcach) przeciwnie skierowanym momentem skręcającym:



Rys. 1 Pręt pryzmatyczny obciążony momentem skręcającym

Poszukiwaną funkcją jest funkcja naprężeń Prandtl'a, dalej oznaczana jako φ . Spełnia ona równanie Poisson'a wewnątrz przekroju oraz ma stałą wartość na jego brzegu (w przypadku przekrojów jednospójnych 0). Dodatkowo moment skręcający jest powiązany z funkcją φ poprzez równanie zawarte poniżej:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = -2G\theta & \text{(wewnątrz przekroju)} \\ \varphi = 0 & \text{(na brzegu przekroju)} \end{array} \right. \quad \text{gdzie} \quad \begin{array}{l} G - \text{moduł Kirchoffa} \\ \theta - \text{jednostkowy kąt skręcenia} \end{array} \quad (1)$$

$$M_s = 2 \int_A \varphi \, dA \quad M_s - \text{moment skręcający}$$

Po rozwiązaniu układu równań (Rów. (1)) można wyznaczyć naprężenia styczne:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2)$$

oraz sztywność na skręcanie:

$$K_s = GI_s = \frac{M_s}{\theta} \text{ gdzie } I_s - \text{moment bezwładności na skręcanie} \quad (3)$$

3. Sformułowanie MES

Punktem wyjścia równania MES jest funkcjonał, którego stacjonarność prowadzi do równania różniczkowego i warunków brzegowych (Rów. 1). Dla równania Poisson'a postać tego funkcjonału jest znana i w przypadku Rów. (1) wygląda następująco:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \left[(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2 \right] dA - 2G\theta \int_A \varphi dA + \dots \quad (4)$$

gdzie „...” odpowiadają warunkom brzegowym, które w MES są uwzględnione na etapie odwracania macierzy równania MES.

Obszar powierzchni przekroju pręta podzielono na trójkątne Elementy Skończone o liniowych funkcjach kształtu. W tekście będą używane oznaczenia (L_i, b_i, c_i, Δ) powszechnie stosowane dla tych elementów (Zienkiewicz i Taylor 2000). Funkcja φ jest aproksymowana w ES następująco:

$$\varphi = L_1 \varphi_1 + L_2 \varphi_2 + L_3 \varphi_3 \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} \varphi_i - \text{wartości funkcji w wierzchołkach ES} \\ L_i - \text{współrzędne trójkątne} \end{cases} \quad (5)$$

Wstawiając tak zdyskretyzowaną funkcję φ do funkcjonału (Rów. 4) i przeprowadzając całkowanie, otrzymano:

$$\Pi = \frac{1}{2} \Delta \left(\left[\frac{b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3}{2\Delta} \right]^2 + \left[\frac{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3}{2\Delta} \right]^2 \right) - \frac{2}{3} G\Delta \theta (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \quad (6)$$

co w zapisie macierzowym można przedstawić:

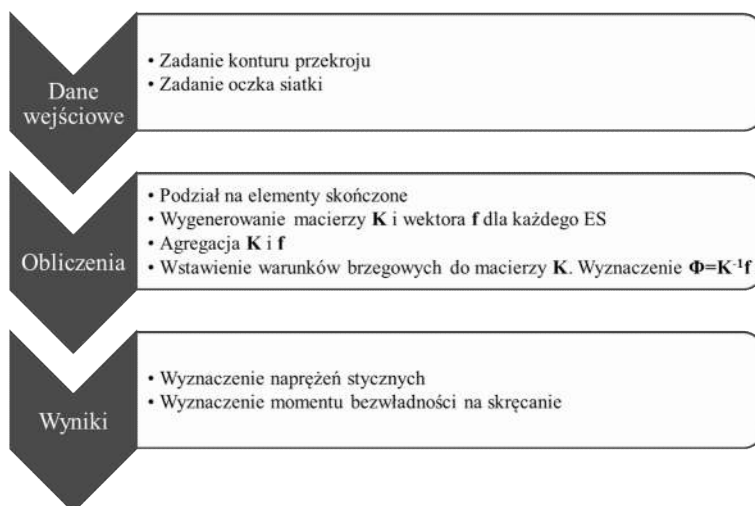
$$\Pi = \frac{1}{2} \Phi^T \mathbf{K} \Phi - \mathbf{f}^T \Phi \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{ij} = \frac{1}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \\ \mathbf{f}_i = \frac{2}{3} \Delta G \theta \end{cases} \quad \Phi = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Celowo użyto powyższych oznaczeń $(\mathbf{K}, \mathbf{f})$, aby pokazać, że z matematycznego punktu widzenia zadanie jest identyczne jak równanie MES elementu sprężystego. Stacjonarność funkcjonału (Rów. (7)) prowadzi ostatecznie do równania MES:

$$\delta \Pi = 0 \rightarrow \mathbf{K} \Phi = \mathbf{f} \quad (8)$$

4. Algorytm rozwiązania

Algorytm rozwiązania zadania został zaimplementowany w środowisku Mathematica 10 i wykorzystuje funkcje specyficzne dla języka tego środowiska. Jego pełny kod dostępny jest na stronie internetowej autora (zwm.pwr.wroc.pl/lewandowski/). Ogólnie algorytm można podzielić na następujące części:



Rys. 2 Schemat algorytmu

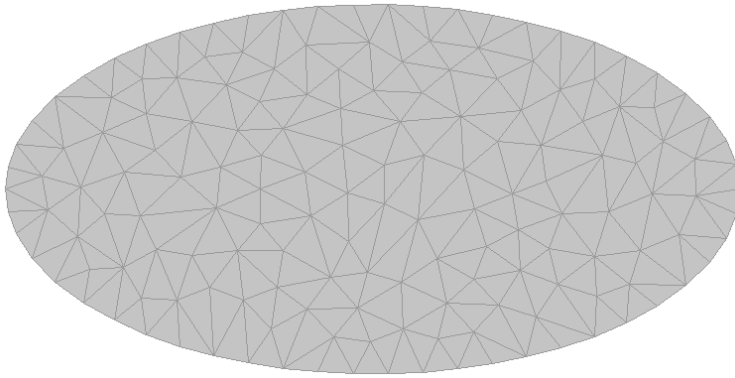
4.1. Dane wejściowe

Na początku pliku programu użytkownik ma możliwość zdefiniowania dowolnego konturu przekroju, wykorzystując w tym celu funkcje środowiska Mathematica. Kontur może być zadany poprzez równanie (np. równanie elipsy) albo najbardziej uniwersalną metodą – przez podanie współrzędnych kolejnych punktów konturu. Dla ułatwienia wprowadzenia przekroju, w pliku są podane przykłady dla elipsy, trójkąta, prostokąta i dwuteownika.

Oprócz konturu konieczne jest zadanie oczka siatki elementów skończonych, czyli średniego rozmiaru boku trójkątnych elementów skończonych, na które zostanie podzielony obszar. Rozmiar oczka ma wpływ na ilość elementów, a co za tym idzie na dokładność oraz czas obliczeń programu.

4.2. Obliczenia

Generacja siatki elementów skończonych wykorzystuje wbudowane funkcje środowiska Mathematica, które zapewniają regularność siatki oraz, przy dostatecznej liczbie ES, rozsądne proporcje długości boków trójkątów (Rys. 3). Program informuje o liczbie wygenerowanych ES.



Rys. 3 Przykładowa siatka dla przekroju eliptycznego (270 ES)

Kolejnym etapem jest wyznaczenie dla każdego ES macierzy $\mathbf{K}$ oraz wektora $\mathbf{f}$. Należy dodać, że bez utraty ogólności w $\mathbf{f}$ przyjmuje się $G=\theta=1$ (fakt ten jest uwzględniony później przy obliczaniu sztywności oraz naprężeń). Następnie wykonywany jest proces agregacji do globalnej macierzy $\mathbf{K}$ i globalnego wektora $\mathbf{f}$, odpowiadających globalnemu wektorowi $\mathbf{\Phi}$ poszukiwanych wartości funkcji w węzłach siatki.

Jak wspomniano wcześniej, warunki brzegowe są zadawane w sposób charakterystyczny dla MES. Oznacza to, że dla każdego i-tego węzła siatki ES, leżącego na brzegu przekroju, modyfikuje się globalną macierz $\mathbf{K}$ tak, że $\mathbf{K}_{ii}=\infty$, gdzie symbol nieskończoności w kodzie programu zastępowany jest tzw. dużą liczbą. Po tym zabiegu możliwe jest już wyznaczenie $\mathbf{\Phi}$:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (9)$$

4.3. Wyniki

Wyznaczenie naprężeń stycznych oraz sztywności na skręcanie jest post-processingiem w stosunku do wykonanych obliczeń (wyznaczenia $\mathbf{\Phi}$). Dodatkowo należy pamiętać, że $\mathbf{\Phi}$ zostało policzone przy założeniu $G=\theta=1$. Uwzględniając ten fakt, wzór na sztywność na skręcanie (Rów. (3)) przyjmie postać:

$$K_s = \frac{M_s}{\theta} = \frac{2G\theta \int_A \varphi dA}{\theta} = 2G \int_A \varphi dA \quad (10)$$

Oznacza to, że należy wykonać całkowanie numeryczne po powierzchni przekroju. Jednym ze sposobów policzenia takiej całki jest wyznaczenie średniej wartości funkcji φ w każdym ES na podstawie wartości w węzłach tego ES:

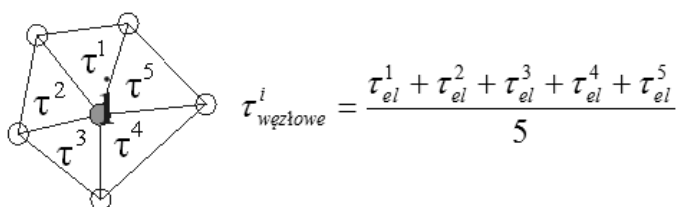
$$\varphi_{sr}^e = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{3} \rightarrow K_s = 2G \sum_{i=1}^{\text{ilość el.}} \varphi_{sr}^e \times \Delta^e \quad (11)$$

Z Rów. (3) błyskawicznie otrzymuje się moment bezwładności na skręcanie I_s .

Korzystając ze wzorów na naprężenia styczne (Rów. (2)), a także nadal pamiętając o uprzednio przyjętym założeniu ($G=\theta=1$) i wykorzystując Rów. (3), otrzymano naprężenia dla każdego ES:

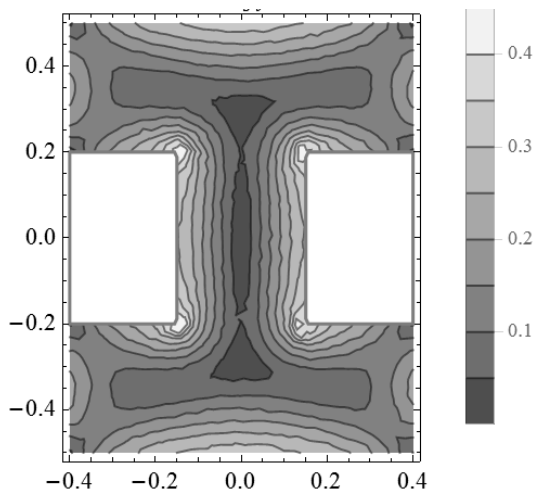
$$\begin{cases} \tau_{xz}^e = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{G\theta}{2\Delta} (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3) = \frac{M_s}{2\Delta I_s} (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3) \\ \tau_{yz}^e = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{G\theta}{2\Delta} (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3) = -\frac{M_s}{2\Delta I_s} (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3) \end{cases} \quad (12)$$

Aby wygenerować mapę naprężeń, wygodnie jest posługiwać się wartościami naprężeń w węzłach. Wyznaczane są one jako średnie wartości z przylegających do danego węzła elementów. Schematycznie pokazuje to Rys. 4:



Rys. 4 Schemat wyznaczania uśrednionych naprężeń w węźle

W programie nie zadaje się wartości momentu skręcającego. Mapa naprężeń generowana jest przy założeniu, że $G\theta = M_s/I_s = 1$. Aby poznać wartość naprężenia, należy przemnożyć wartość z mapy przez M_s/I_s . W programie Mathematica możliwe jest odczytanie wartości dla dowolnego punktu mapy poprzez najechanie na niego kursorem. Przykładowa mapa naprężeń stycznych wygląda następująco:

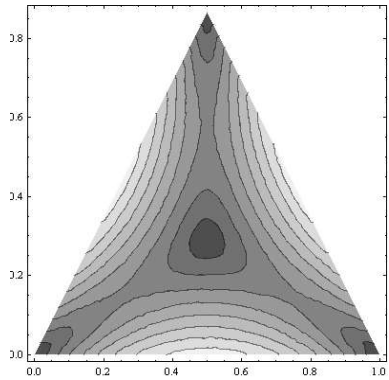
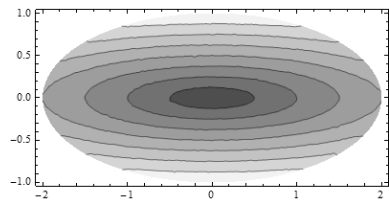
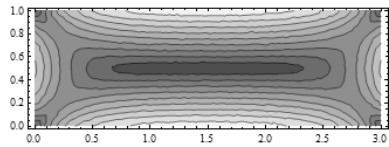


Rys. 5 Mapa wypadkowych naprężeń stycznych dla przekroju dwuteowego

5. Weryfikacja

W celu zbadania poprawności algorytmu wykonano obliczenia MES dla trzech przykładów, które mają także rozwiązanie ścisłe (np. Siemieniec i Wolny, 2002). Poniżej zestawiono wyniki z programu z wynikami analitycznymi:

Tab. 1 Porównanie wyników programu z wynikami analitycznymi

	Wymiary [j]	Moment bezwł. na skręcanie [j ⁴]	
		Rozw. ścisłe	Rozw. MES
	$a = 1$	0,0216506	0,0216307 (6774 ES)
	$r_1 = 1$ $r_2 = 2$	5,02655	5,02256 (9721 ES)
	$a = 3$ $b = 1$	$\approx 0,789$	0,788582 (4673 ES)

W nawiasach (Tab. 1) podano liczbę elementów skończonych siatki. Zauważyć można bardzo dobrą dokładność rozwiązań MES. W każdym przypadku czas obliczeń wyniósł kilkadziesiąt sekund. Należy dodać, że w przypadku prostokąta wynik uzyskany metodą analityczną jest przybliżony, ponieważ jest on sumą pewnej skończonej ilości wyrazów nieskończonego szeregu. Stąd jego względnie mała dokładność. Na podstawie porównania wartości (różnice poniżej 1%) można stwierdzić poprawność opracowanego programu.

6. Podsumowanie

W niniejszej pracy zostały przedstawione podstawy matematyczne oraz zaproponowane numeryczne rozwiązanie zagadnienia swobodnego skręcania. Opracowany algorytm został zweryfikowany. Przedstawiono także sposób korzystania z programu, który nadaje się do zastosowania inżynierskiego. Jego dużą zaletą jest prostota obsługi, a pod względem merytorycznym fakt, że pozwala wyznaczyć naprężenia styczne oraz sztywność na skręcanie dowolnego przekroju, co jest praktycznie niemożliwe do uzyskania metodami analitycznymi, poza kilkoma szczególnymi przypadkami. Pewnym ulepszeniem programu mogłaby być możliwość zadania przekroju z otworami (niejednokrotnie przekroje takie są wykorzystywane konstrukcyjnie). Opracowany program byłby dobrym punktem wyjścia do tego celu, ponieważ rozwiązanie dla takiego przekroju korzysta z rozwiązania przedstawionego w artykule.

7. Literatura

Gawęcki A (2003) Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych

Siemieniec A, Wolny S (2002) Wytrzymałość Materiałów, Część I

Wagner W, Gruttmann F (2001) Finite Element Analysis of Saint-Venant Torsion Problem with Exact Integration of the Elastic-Plastic Constitutive Equations. Computer methods in applied mechanics and engineering 190: 3831-3848

Zienkiewicz OC, Taylor RL (2000) The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis