



# Politechnika Wrocławska



## Algorytm MES rozwiązania zagadnienia swobodnego skręcania pręta o dowolnym przekroju

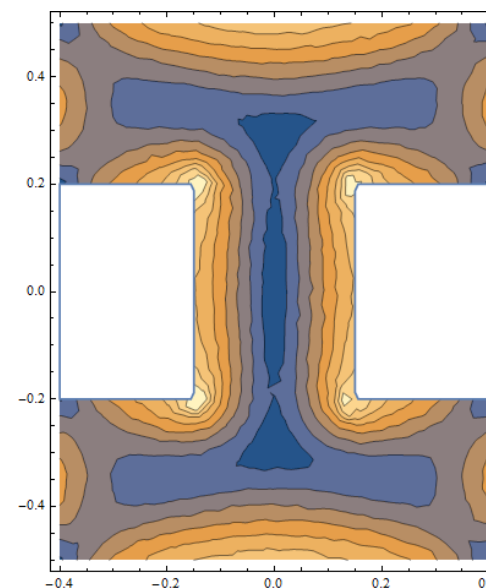
mgr inż. Jakub Lewandowski

Politechnika Wrocławska  
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Zakład Wytrzymałości Materiałów



# Plan prezentacji

- ☐ Założenia i cele
- ☐ Podstawy matematyczne
- ☐ Algorytm
- ☐ Przykłady, weryfikacja
- ☐ Literatura



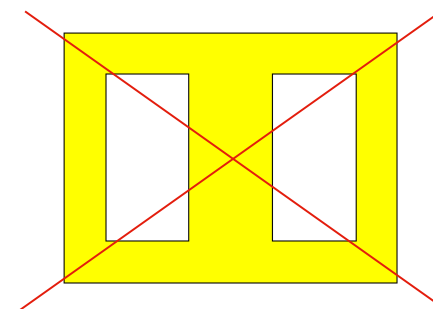
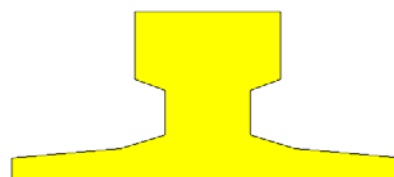
# Założenia i cele

## Założenia i cele:

- wyznaczenie sztywności na skręcanie wg teorii skręcania swobodnego
- wyznaczenie rozkładu naprężeń stycznych
- uniwersalność (dowolny przekrój)
- przystępność programu
- kompleksowe rozwiązanie (od generacji siatki po wyniki końcowe)

## Ograniczenia:

- przekroje zwarte
- przekroje jednospójne



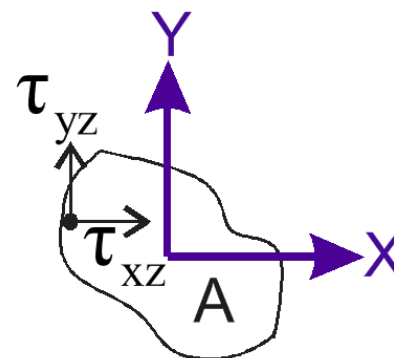
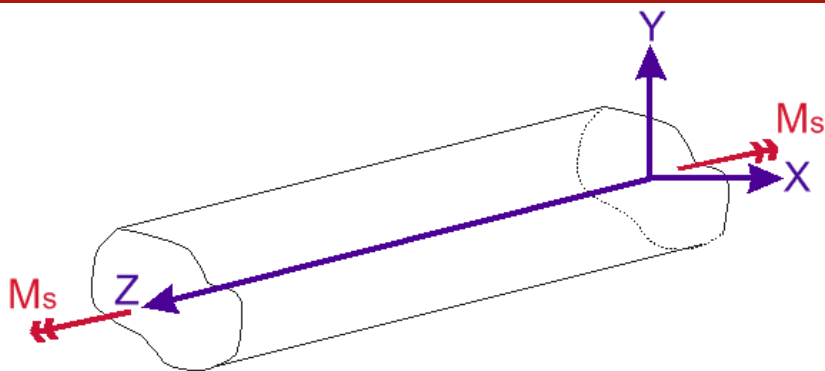
## Zastosowanie:

- projektowanie belek o zwartych przekrojach, obciążonych momentem skręcającym (dźwigary mostowe, wieńce żelbetowe, ...)



# Podstawy matematyczne

## Teoria skręcania swobodnego pręta pryzmatycznego

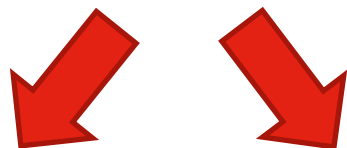


$$\begin{cases} \Delta\varphi = -2G\theta & \text{(wewnątrz przekroju)} \\ \varphi = 0 & \text{(na brzegu przekroju)} \\ M_s = 2\int_A \varphi dA \end{cases}$$

$G$  - moduł Kirchhoffa

gdzie  $\theta$  - jednostkowy kąt skręcenia

$M_s$  - moment skręcający



$$\tau_{xz} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$K_s = GI_s = \frac{M_s}{\theta} \leftarrow \text{sztywność na skręcanie}$$

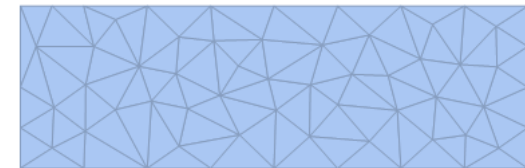


# Podstawy matematyczne

## Funkcjonał i równania MES

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A [(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2] dA - 2G\theta \int_A \varphi dA + \dots$$

$$\delta \Pi = 0 \rightarrow \Delta \varphi = -2G\theta$$



Zastosowano trójkątne ES o liniowych funkcjach kształtu:

$$\varphi = L_1 \varphi_1 + L_2 \varphi_2 + L_3 \varphi_3 \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} \varphi_i - \text{wartości funkcji w wierzchołkach ES} \\ L_i - \text{współrzędne trójkątne} \end{cases}$$

Postać funkcjonału po dyskretyzacji  $\varphi$  i przekształceniach:

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} - \mathbf{f}^T \mathbf{\Phi}} \quad \mathbf{K}_{ij} = \frac{1}{4A} (b_i b_j + c_i c_j) \quad \mathbf{\Phi} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} - \text{wektor wartości węzłowych}$$
$$\mathbf{f}_i = \frac{2}{3} GA\theta$$

$$\boxed{\delta \Pi = 0 \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{f}}$$



# Algorytm MES

Mathemtica 10.0

## Dane wejściowe

- Zadanie konturu przekroju
- Zadanie oczka siatki

## Obliczenia

- Podział na elementy skończone
- Wygenerowanie macierzy  $\mathbf{K}$  i wektora  $\mathbf{f}$  dla każdego ES
- Agregacja  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{f}$
- Wstawienie warunków brzegowych do macierzy  $\mathbf{K}$ . Wyznaczenie  $\Phi = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$

## Wyniki

- Wyznaczenie naprężeń stycznych
- Wyznaczenie momentu bezwładności na skręcanie



# Algorytm

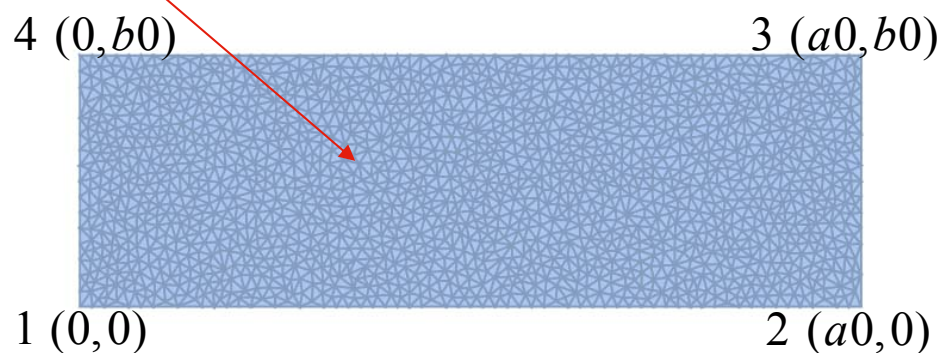
Dane wejściowe

- ❑ Zadanie konturu przekroju poprzez podanie listy wierzchołków
- ❑ Automatyczna generacja siatki

(\*PROSTOKĄT\*)

`a0 = 25; b0 = 8; oczko = 0.1;`

`R = BoundaryMeshRegion[{{0, 0}, {a0, 0}, {a0, b0}, {0, b0}}, Line[{{1, 2, 3, 4, 1}}];`



# Algorytm

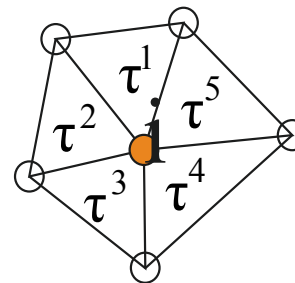
- Wyznaczenie naprężeń w elementach:

$$\tau_{xz}^e = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3)$$

$$\tau_{yz}^e = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2A} (b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3)$$

- Uśrednione naprężenia w węzłach (pozwała to wygenerować wykres naprężeń):

$$np. \tau_{węzłowe}^i = \frac{\tau_{el}^1 + \tau_{el}^2 + \tau_{el}^3 + \tau_{el}^4 + \tau_{el}^5}{5}$$

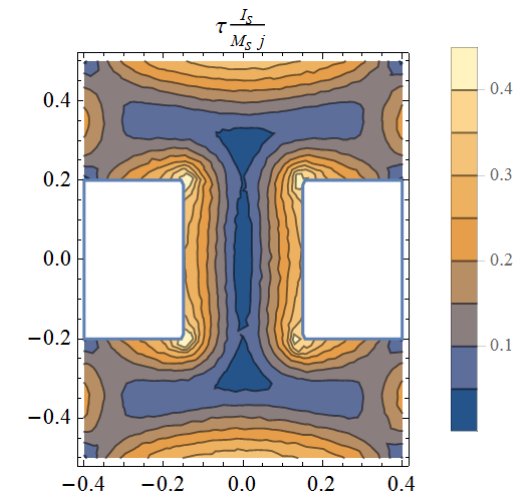


- Uśredniona wartość  $\varphi$  w elementach:

$$\varphi_{sr}^e = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{3}$$

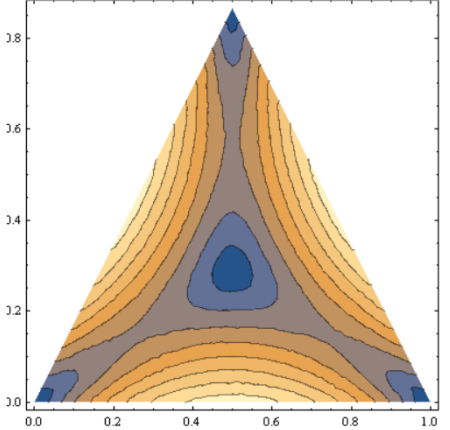
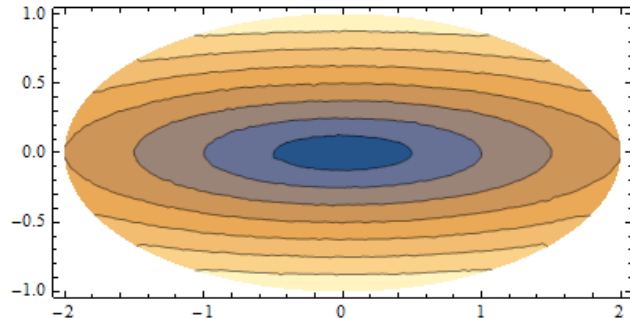
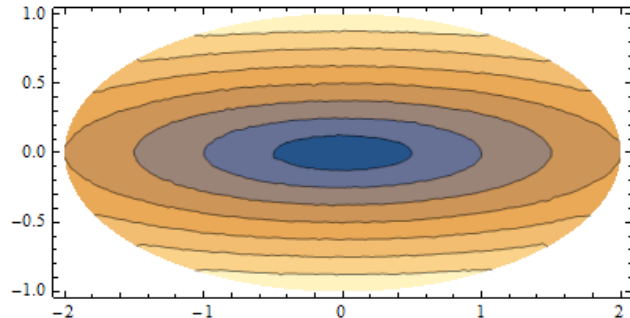
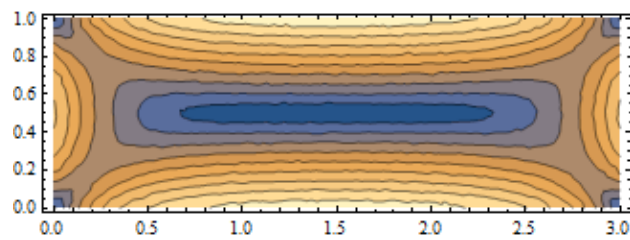
- Sztywność na skręcanie przekroju:

$$I_s = 2 \sum_{i=1}^{ilość\ el.} \varphi_{sr}^e \times A^e, \quad K_s = G I_s$$





# Przykłady, weryfikacja

|    | Wymiary [j]            | Moment bezwładności na skręcanie [ $j^4$ ] |                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------|---------------------|
|                                                                                     |                        | rozw. ścisłe                               | rozw. MES           |
|   | $a = 1$                | 0,0216506                                  | 0,0216307 (6774 ES) |
|   | $r_1 = 1$<br>$r_2 = 2$ | 5,02655                                    | 5,02256 (9721 ES)   |
|  | $a = 3$<br>$b = 1$     | $\approx 0,789$                            | 0,788582 (4673 ES)  |



# Literatura

1. Zienkiewicz OC, Taylor RL (2000) The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis
2. Gawęcki A (2003) Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych
3. online coursebook for Advanced Variational Methods In Mechanics, Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder,  
[www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AVMM.d/](http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AVMM.d/)

Program dostępny na stronie:

[www.zwm.pwr.wroc.pl/lewandowski/](http://www.zwm.pwr.wroc.pl/lewandowski/)