

**[TUTAJ DRUKOWANA JEST STRONA TYTUŁOWA]**

## Spis treści

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Wstęp .....                                                                                         | 4  |
| Cel oraz zakres pracy .....                                                                         | 4  |
| Wprowadzenie w tematykę dźwigarów warstwowych oraz szczegółowe zdefiniowanie przedmiotu pracy ..... | 4  |
| Materiały okładzin oraz rdzenia .....                                                               | 6  |
| Przedstawienie założeń metod obliczeniowych .....                                                   | 7  |
| MES – wprowadzenie, analiza liniowa .....                                                           | 7  |
| Stateczność liniowa .....                                                                           | 10 |
| Analiza nieliniowa oraz metody przyrostowe .....                                                    | 11 |
| MES – analiza nieliniowa ze względu na model materiału .....                                        | 13 |
| Charakterystyka wykorzystywanych elementów skończonych .....                                        | 15 |
| Analiza wyboczeniowa ściany warstwowej .....                                                        | 18 |
| Analiza MES .....                                                                                   | 18 |
| Założenia .....                                                                                     | 18 |
| Uproszczenie modelu 3D do modelu 2D oraz jego konsekwencje .....                                    | 19 |
| Możliwość wyboczenia lokalnego blachy .....                                                         | 20 |
| Metoda analityczna .....                                                                            | 22 |
| Założenia .....                                                                                     | 22 |
| Równanie energii pręta Timoshenki .....                                                             | 22 |
| Rozwiązanie układu równań .....                                                                     | 24 |
| Wyznaczenie wzorów na siły krytyczne dla różnych warunków podparcia .....                           | 24 |
| Wyznaczenie sił krytycznych dla ściany warstwowej .....                                             | 28 |
| Porównanie wyników uzyskanych MES oraz analitycznie .....                                           | 28 |
| Wykresy nośności ścian w zależności od smukłości oraz zastosowanego materiału rdzenia .....         | 30 |
| Wnioski .....                                                                                       | 32 |
| Analiza nośności MES panelu zakrzywionego .....                                                     | 33 |
| Cel, założenia modelowe .....                                                                       | 33 |
| Stateczność liniowa .....                                                                           | 34 |
| Analiza nieliniowa ze względu na duże przemieszczenia .....                                         | 34 |

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Analiza liniowa.....                                                                     | 36 |
| Zestawienie wyników dla analizowanego panelu .....                                       | 37 |
| Zestawienie wyników dla różnych przypadków materiałowo – geometrycznych .....            | 38 |
| Wpływ parametrów na formę wyczerpania nośności – interpretacja wykresów oraz wnioski.... | 43 |
| Podsumowanie i wnioski.....                                                              | 45 |
| Bibliografia.....                                                                        | 46 |

## Wstęp

### Cel oraz zakres pracy

Celem pracy jest, idąc za *Tematem pracy dyplomowej magisterskiej*, określenie nośności płaskiego i mało wyniosłego dźwigara trójwarstwowego, z uwzględnieniem efektów nieliniowości geometrycznej i fizycznej. Dodatkowym celem, który przyświecał autorowi jest interpretacja zgromadzonych danych pod kątem praktycznym – przydatne wnioski mogące posłużyć do projektowania płaskich i zakrzywionych dźwigarów warstwowych.

Zgodnie z zakresem przedstawionym w *Temacie* przeprowadzono:

- analityczne wyznaczenie obciążenia wyboczeniowego płaskiego dźwigara, pracującego w płaskim stanie odkształcenia, z uwzględnieniem odkształcalności postaciowej
- modelowanie dźwigara w systemie MES Cosmos/M; wykonanie serii obliczeń MES dla różnych parametrów geometrycznych i materiałowych w celu ustalenia ich wpływu na niezbędny zakres analizy: wyboczenie, nieliniowość geometryczna, nieliniowość fizyczna

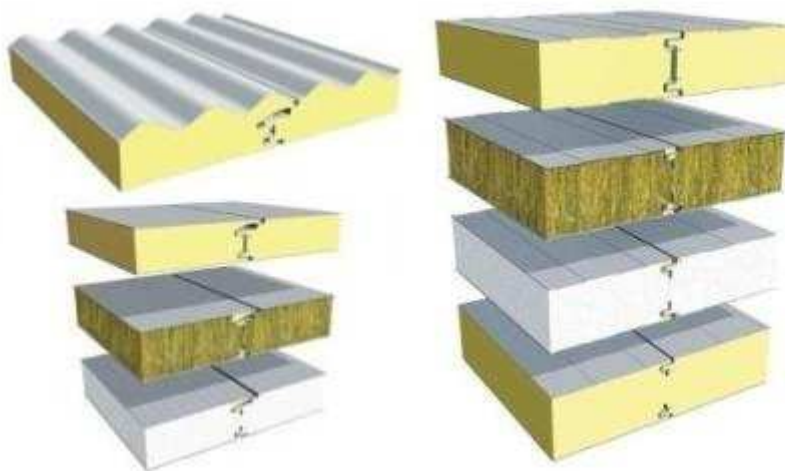
Zrealizowano z rozszerzeniem przedstawiony zakres. Nie wykonano jedynie analizy nieliniowej w zakresie nieliniowości fizycznej dla docelowego dźwigara z przyczyn technicznych, o czym szerzej mówi rozdział *MES – analiza nieliniowa ze względu na model materiału*.

### Wprowadzenie w tematykę dźwigarów warstwowych oraz szczegółowe zdefiniowanie przedmiotu pracy

Tematem pracy jest nieliniowa analiza nośności trójwarstwowego dźwigara powierzchniowego. Pojęcie dźwigara powierzchniowego odnosi się do konstrukcji o dwu wymiarach wyraźnie większych od pozostałych. Prostymi przypadkami dźwigarów powierzchniowych są np. ściany, tarcze, płyty. Mogą należeć do nich także konstrukcje o zakrzywionej geometrii.

Termin warstwowy(zamiennie stosowany z sandwichowy, przekładkowy) odnosi się do ogólniejszej grupy materiałów - kompozytowych. Kompozyt to „*tworzywo złożone z co najmniej dwu składników (osnowy i wzmocnienia) tak dobranych, by każdy, zachowując swoje właściwości, nadawał kompozytowi jako całości właściwości lepsze i/lub nowe (dodatkowe)*”[1]. Kompozyty warstwowe są stosowane już od dawna. Warto przytoczyć słowa z publikacji[2] prof. Politechniki Wrocławskiej Wydziału Mechanicznego Piotra Wrzecioniarza z 1990 roku: „*Zauważalny początek przemijania ery żelaza, żeliwa i stali jest związany między innymi z coraz liczniejszymi zastosowaniami tworzyw sztucznych, elementów zbrojonych i warstwowych, które wypierają klasyczne materiały homogeniczne.(...)Już nie tylko środki transportu kosmicznego i lotniczego, ale również jednostki pływające, wagony, samochody, elementy budowlane, przedmioty codziennego użytku buduje się z myślą o skutecznym zmniejszeniu masy własnej z zachowaniem lub polepszeniem innych właściwości, w tym i wytrzymałościowych.*”

Przykładem powszechnie stosowanych konstrukcji warstwowych w budownictwie mogą być płyty warstwowe (Rysunek 1), stanowiące lekką obudowę ścian i dachów np. w halach.



Rysunek 1. Płyty warstwowe lekkiej obudowy[3]

Zastosowanie blach trapezowych zapewnia nośność, zaś rdzeń lekkość i izolacyjność, a także przyczynia się do zwiększenia nośności poprzez zwiększenie odległości między okładzinami stalowymi (a tym samym momentu bezwładności całej konstrukcji).

Skoro już mowa o płytach warstwowych, warto zaznaczyć, że istnieje europejska norma[4], dotycząca ich projektowania. Istotna jest uwaga poczyniona w normie (oryginał w angielskiej wersji językowej):

**“NOTE** When the bending stiffness of a face in a sandwich panel cannot be neglected, the panel is itself statically indeterminate in addition to any global structural indeterminacy that may be present. Explicit solutions are given in the references for a few simple cases but, in general, numerical methods of analysis, e.g. **the finite element method**, shall be used.”

Uwaga ta zatem jest już jednym z powodów, dla których warto zająć się szerzej problematyką konstrukcji warstwowych w sposób numeryczny, jak wskazano powyżej, a także analityczny.

W niniejszej pracy autor zajmuje się określeniem nośności dwu rodzajów konstrukcji. Metody oraz cele analizy nośności zestawiono w tabeli:

Tabela 1. Metody oraz cele analizy nośności

| Rodzaj konstrukcji                                                      | Metody analizy                                       | Cel                                |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Ściana warstwowa obciążona siłą pionową                                 | Analityczna                                          | Wyznaczenie obciążenia krytycznego |
|                                                                         | Metoda elementów skończonych* - analiza wyboczeniowa | Weryfikacja metody analitycznej    |
| Zakrzywiony panel warstwowy obciążony równomiernie obciążeniem pionowym | MES – analiza liniowa                                | Wyznaczenie obciążenia granicznego |
|                                                                         | MES – analiza wyboczeniowa                           | Wyznaczenie obciążenia krytycznego |
|                                                                         | MES – analiza nieliniowa                             | Wyznaczenie obciążenia krytycznego |

\*od tego miejsca autor używa powszechnie stosowanego skrótu – MES

Przeanalizowano 3 formy wyczerpania nośności, prowadzące do wyznaczenia maksymalnego dopuszczalnego obciążenia, o których mowa szczegółowo w następnych rozdziałach. Termin obciążenie graniczne dotyczy nośności ze względu na wytrzymałość

materiałów, zaś obciążenie krytyczne – ze względu na utratę stateczności konstrukcji w jednej z dwu typów wymienionych analiz.

Końcowym efektem pracy jest zestawienie, osobno dla ściany oraz panelu, wyników analiz dla różnych parametrów geometryczno – wytrzymałościowych.

## Materiały okładzin oraz rdzenia

Przeprowadzono studium materiałów polimerowych oraz popularnie stosowanych w budownictwie w konstrukcjach warstwowych (najczęściej w płytach lekkiej obudowy). Korzystano z polskiej normy konstrukcji stalowych[5], danych producentów stali[6], prezentacji i wykładów na temat powszechnie stosowanych materiałów([7],[8]) oraz danych wyznaczonych bezpośrednio w doświadczeniach[9], a także zawartych w aprobatkach technicznych. Na ich podstawie powstała Tabela 2:

**Tabela 2. Parametry materiałów przyjmowanych do modelowania MES i obliczeń analitycznych.**

| Materiał okładzin    | Nazwa                | Źródła danych              | $E$ [MPa]  | $R_{eH}$ [MPa] | $\nu$ |
|----------------------|----------------------|----------------------------|------------|----------------|-------|
|                      | Stal                 | [5],[6]                    | 210 000    | 195 ÷ 700      | 0.30  |
| Materiał wypełnienia | Nazwa                | Źródła danych              | $E$ [MPa]  | $R_r$ [MPa]    |       |
|                      | Polimery             | [7]                        | 1 ÷ 52 000 | 1 ÷ 145        |       |
|                      | Styropian            | [8]                        | 3.5 ÷ 8.5  | 0.15 ÷ 0.55    |       |
|                      |                      | [9]                        | 3 .8       |                | 0.08  |
|                      |                      | minimum wg AT-15-7919/2009 | 2.5        | 0.10           |       |
|                      | Pianka poliuretanowa | minimum wg AT-15-7910/2010 | 4          | 0.20           |       |
|                      | Wełna mineralna      | minimum wg AT-15-8611/2011 | 7          | 0.07           |       |

## Przedstawienie założeń metod obliczeniowych

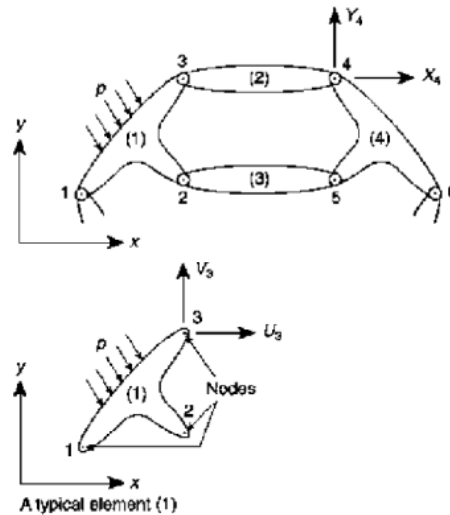
### MES – wprowadzenie, analiza liniowa

Celem stosowania metody elementów skończonych w budownictwie jest uzyskanie wyników (np. naprężeń, odkształceń) dla rozpatrywanej konstrukcji. Nie można jednak interpretować wyników, nie mówiąc o tym, jak dużych przybliżeń dokonuje się zastępując obiekt rzeczywisty modelem elementów skończonych. Stąd krótkie przybliżenie drogi, prowadzącej do wyników. Na drodze tej pojawiają się kolejne etapy:

- obiekt rzeczywisty – rzeczywista konstrukcja (wraz z oddziaływaniami), którą należy poddać myślowym uproszczeniom, aby mogła stać się przedmiotem obliczeń o określonych założeniach
- model fizyczny: *„Obiekt rzeczywisty poddawany analizie stanowi pewien obszar przestrzeni, będący ośrodkiem ciągłym.(...) Analiza zachowania się takiego obiektu na skutek oddziaływań zewnętrznych lub przemian wewnętrznych wymaga stworzenia pewnego abstrakcyjnego modelu myślowego wraz ze zbiorem formuł reguł odzwierciedlających jego własności. Zachowanie się obiektu rzeczywistego określają konkretne zjawiska fizyczne opisane prawami fizyki. Model taki nazywamy modelem fizycznym.”*[10]
- model matematyczny: *„Dla każdego obiektu rzeczywistego można stworzyć wiele modeli fizycznych. W zależności od posiadanych danych wejściowych, poszukiwanych wielkości oraz przyjętych sposobów rozwiązania, dzięki zastosowaniu odpowiednich aparatów matematycznych, tworzymy model matematyczny, który z przyjętym uproszczeniem odzwierciedla model fizyczny.(...) Przyjęte metody matematyczne zazwyczaj wymagają zastosowania pewnych uproszczeń, wyidealizowania zjawiska, na przykład użycia modelu ciała doskonale sztywnego albo gazu idealnego, pominięcia tarcia. Zastosowane uproszczenia znacznie ułatwiają opis zagadnienia, ale mogą spowodować pominięcie ważnych cech układu rzeczywistego.”*[10]
- model numeryczny: *„Aparaty matematyczne wykorzystywane do opisu zjawisk fizycznych często stanowią zbiory równań różniczkowych, całkowych, które należy zamienić na zbiory równań algebraicznych, zrozumiałych dla maszyn obliczeniowych – komputerów.”*[10] Prowadzi to do zabiegów takich jak np. dyskretyzacja, całkowanie numeryczne, a w konsekwencji do kolejnych odchyłek od wyniku ścisłego, a tym samym do jeszcze większego odejścia od rozważanego obiektu rzeczywistego.

Kolejne akapity tego rozdziału są parafrazami treści zawartych w [11] oraz [12] i dotyczą ogólnych założeń MES i jej aspektów, mających bezpośrednie zastosowanie w pracy.

Proste konstrukcje można traktować jako zespoły elementów połączonych skończoną ilością punktów węzłowych. Jeśli związki między siłami i przemieszczeniami dla elementów są znane, można wyprowadzić wnioski dotyczące zachowania się całej konstrukcji.



Rysunek 2. Przykład konstrukcji zbudowanej z elementów połączonych w węzłach[13]

I tak, analizując przykład (Rysunek 2), przyjmując, że znane są relacje sił z przemieszczeniami dla poszczególnych elementów, rozpatrzyć można konkretny element (1), powiązany z konstrukcją węzłami 1,2,3. Siły działające na te węzły są jednoznacznie określone przez ich przemieszczenia, obciążenie oddziałujące na element ( $p$ ) i jego wstępne odkształcenia. Odpowiednie siły  $F$  i przemieszczenia  $\delta$  są określone przez składowe  $U, V, u, v$ . Formułując to wektorowo dla elementu (1) jest:

$$\{F\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}; \quad \{\delta\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Zakładając, że element jest sprężysty (stosując więc analizę liniową) zachodzi:

$$\{F\}^{(1)} = [k]^{(1)}\{\delta\}^{(1)} + \{F\}_p^{(1)} + \{F\}_{e0}^{(1)}, \text{ gdzie:}$$

$\{F\}_p^{(1)}$  - siły węzłowe niezbędne do zrównoważenia każdego obciążenia zewnętrznego działającego na element(1)

$\{F\}_{e0}^{(1)}$  - siły węzłowe wywołane odkształceniami początkowymi

$[k]^{(1)}\{\delta\}^{(1)}$  - siły wywołane przemieszczeniami węzłów

$[k]^{(1)}$  - macierz sztywności elementu (1)

W analizowanym przykładzie węzły przenoszą tylko po 2 składowe sił. W przypadku ogólnym, zakładając sztywne połączenia elementów, wystarczy wprowadzić 6 składowych wektora sił i wektora przemieszczenia. Ogólnie dla dowolnego elementu można zapisać:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i^e \\ \vdots \\ F_m^e \end{Bmatrix} \text{ oraz } \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i^e \\ \vdots \\ \delta_m^e \end{Bmatrix}$$

gdzie każde wektor  $F_k^e$  oraz  $\delta_k^e$  ma tę samą liczbę składowych, czyli tzw. stopni swobody. Macierze sztywności elementu mają postać:



$$[k]^e = \begin{pmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{pmatrix}$$

i są kwadratowe. Podmacierze  $k_{kh}$  są także kwadratowe mające wymiar równy ilości stopni swobody w rozpatrywanym węźle.

Aby rozwiązać całą konstrukcję (Rysunek 2) należy spełnić warunek zgodności przemieszczeń oraz równowagi. Wektor przemieszczeń węzłów dla całej konstrukcji:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}$$

automatycznie spełnia pierwszy z nich. Warunki równowagi są spełnione wewnątrz każdego elementu. Pozostaje więc sformułowanie warunków równowagi w węzłach konstrukcji. Wynikające stąd równania zawierają tylko przemieszczenia jako niewiadome, a więc w ten sposób dochodzi się do rozwiązania problemu statycznego. Następnie siły elementu można wyznaczyć przy pomocy macierzy  $[k]^e$ . Niech konstrukcja będzie obciążona siłami zewnętrznymi

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}, \text{ gdzie w rozważanym przykładzie } \{R_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}$$

Aby sformułować równanie równowagi węzła „i”-tego należy zsumować wszystkie składowe siły w węźle „i”. Otrzymuje się:

$$\{R_i\} = \sum_e \{F_i^e\} = \{F_i^{(1)}\} + \{F_i^{(2)}\} + \dots$$

gdzie tylko elementy łączące się w węźle „i”-tym wnoszą do równania siły niezerowe. Zatem:

$$\{R_i\} = \left( \sum_e [k_{i1}]^e \right) \delta_1 + \left( \sum_e [k_{i2}]^e \right) \delta_2 + \dots + \sum_e \{F_i\}_p^e + \sum_e \{F_i\}_{\epsilon 0}^e$$

co można zapisać w postaci:

$$[K]\{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\epsilon 0}, \text{ gdzie:}$$

$$[K_{im}] = \sum_e [k_{im}]^e$$

$$\{F_{im}\} = \sum_e \{F_i\}_p^e$$

$$\{F_i\}_{\epsilon 0} = \sum_e \{F_i\}_{\epsilon 0}^e$$

Układ równań może być rozwiązany, gdy zostaną podstawione odpowiednie przemieszczenia. W rozważanym przykładzie należy podstawić

$$\{\delta_1\} = \{\delta_6\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Jeśli zostanie podstawionych mniej przemieszczeń, niż wymagane jest to dla zapewnienia geometrycznej niezmienności układu, macierz  $[K]$  będzie osobiwa, co pozwala matematycznie zweryfikować poprawność wprowadzonych danych.

Często wygodniej jest zestawiać równania dla poszczególnych elementów w ich lokalnych układach współrzędnych. Składowe przemieszczeń można łatwo przetransformować na składowe przemieszczeń dla konkretnego elementu poprzez odpowiednią macierz kosinusów kierunkowych  $[L]$ . Wtedy:

$$\{\delta'\} = [L]\{\delta\}^e \text{ oraz } \{F'\} = [L]\{F\}^e$$

Równanie równowagi elementu ma wtedy postać:

$$\{F\}^e = [L]^{-1}\{F'\}^e$$

więc macierz sztywności w ogólnych współrzędnych określa wzór:

$$[k]^e = [L]^{-1}[k']^e[L]$$

Macierz transformacji jest ortogonalna, zatem

$$[k]^e = [L]^T[k']^e[L]$$

## Stateczność liniowa

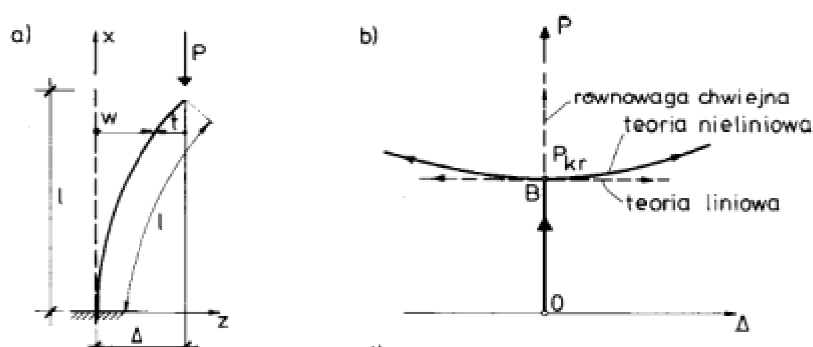
W dotychczasowych rozważaniach przyjmowano założenie o sprężystości elementów konstrukcji. Taka analiza przy pomocy programu MES nosi nazwę analizy liniowej. Innym podejściem charakteryzuje się jednak MES w rozwiązywaniu zagadnień stateczności. „*Teoria stateczności konstrukcji zajmuje się wyznaczaniem obciążeń stanów krytycznych konstrukcji, którym towarzyszą gwałtowne zmiany postaci lub wartości przemieszczeń.*”[11]. W pracy magisterskiej obciążeniem krytycznym autor będzie nazywać obciążenie, przy którego małym przyroście konstrukcja będzie wykazywała duże przemieszczenie. Aby wykazać istotność badania problemów stateczności można sięgnąć do przykładów z historii, kiedy to brak zastosowania wiedzy o stateczności w procesie projektowania konstrukcji doprowadził do katastrofy. Odnotowano wiele wypadków, gdzie utrata nośności konstrukcji była wywołana obciążeniem krytycznym, nie zaś granicznym (czyli wyczerpaniem nośności najbardziej wyczerpanych elementów / wyczerzonego elementu). Można wymienić zawalenie się mostu w Menchestern w Szwajcarii, nieudaną próbę montażu przęsła mostu przez rzekę Św. Wawrzyńca w Kanadzie 1907 roku czy katastrofę mostu w Quebec (przykłady zaczerpnięte z [14]).

Teoretyczne podstawy stateczności prętów w obszarach sprężystych opracował i zastosował po raz pierwszy Leonard Euler w latach 1744-1780. Teoria stateczności konstrukcji wymusza odejście od zasady zeszywnienia, co oznacza, że należy oprzeć się na równaniach co najmniej tzw. teorii II rzędu, które mają charakter nieliniowy. Równania te można linearyzować, dochodząc do tzw. liniowej teorii stateczności konstrukcji lub inaczej - teorii wyboczenia. Jej ideą jest uwzględnienie wpływu im perfekcji (wstępnych małych przemieszczeń) na reakcję konstrukcji. Przykładowe analityczne podejście do zagadnienia

prezentuje rozdział *Metoda analityczna*. Analiza stateczności liniowej MES jest bardziej skomplikowana od analizy liniowej i nie jest szczegółowo omówiona w tej pracy. Jej efektem są wyniki w postaci form wyoboczeniowych oraz mnożników obciążenia krytycznego, wywołującego nagły przyrost przemieszczeń rozpatrywanego modelu konstrukcji. Z założenia teorii przemieszczenia są bardzo małe i do bifurkacji ścieżki równowagi dochodzi „nagle” w sensie matematycznym.

## Analiza nieliniowa oraz metody przyrostowe

Istnieją jednak konstrukcje, jak np. dźwigary zakrzywione, dla których konieczna jest nieliniowa analiza stateczności. Nie zakłada się w niej imperfekcji – małych przemieszczeń, ale rozważa się efekty zaistnienia dużych przemieszczeń. Oprócz odejścia od zasady zeszywnienia uwzględnia się także np. zmianę krzywizny elementów[15]. Ścieżki bifurkacyjne stanów równowagi mają charakter nieliniowy, co obrazuje przykład:



Rysunek 3. Obciążenie krytyczne wspornika wg teorii liniowej oraz nieliniowej[15]

Rozwiązania ścisłe istnieją tylko dla nielicznych przykładów [11], [15], dlatego konieczne jest stosowanie metod numerycznych.

W liniowych zagadnieniach teorii sprężystości dotyczących małych odkształceń ostatecznym równaniem było:

$$[K]\{\delta\} - \{R\} = 0$$

gdzie  $\{R\}$  obejmuje wszystkie siły od obciążeń zewnętrznych, naprężeń, odkształceń początkowych, itd.; założono także liniowe prawo reologiczne:

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} *$$

gdzie  $[D]$  - macierz sztywności,  $\{\sigma\}, \{\epsilon\}, \{\sigma_0\}, \{\epsilon_0\}$  - odpowiednio macierze naprężeń i odkształceń końcowych oraz początkowych. W prawie tym założono liniową proporcjonalność naprężeń do odkształceń. W zagadnieniach nieliniowych tak nie jest. Wiadomym jest jednak, że ogólnie

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon\}) = 0 **$$

Jeżeli rozwiązanie równania  $[K]\{\delta\} - \{R\} = 0$  można uzyskać poprzez zmianę  $[D]$  tak, że przy zastosowaniu (\*) otrzymuje się takie same wartości naprężeń i odkształceń jak w (\*\*), to wyniki są rozwiązaniem zadania. Stąd sposób zmiennej sztywności - ponieważ macierz

sprężystości wpływa na ostateczną macierz sztywności całego układu przedmiotem tego sposobu jest rozwiązanie zadania

$$\{\psi\} = [K(\{\delta\})]\{\delta\} - \{R\} = 0$$

Najprostszą metodą jest metoda iteracyjna, w której najpierw przyjmuje się  $\{\delta\}_0 = 0$ , aby wyznaczyć

$$[K(\{\delta\})]\{\delta\} = [K_0]$$

po czym rozwiązać

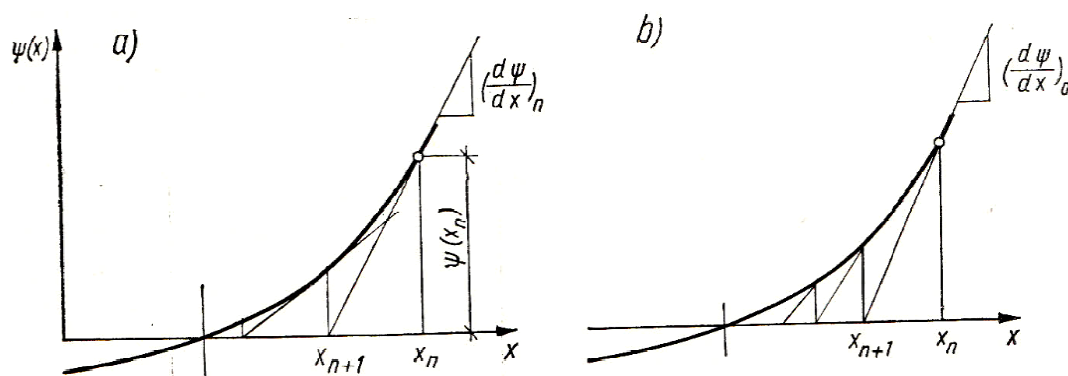
$$\{\delta\}_1 = [K_0]^{-1}\{R\}$$

powtarzając proces dla

$$\{\delta\}_n = [K_{n-1}]^{-1}\{R\}$$

aż do zaniknięcia różnic w kolejnych wartościach przemieszczeń. Poważną wadą opisanego sposobu jest konieczność formułowania na nowo, przy każdym kolejnym kroku macierzy sztywności i rozwiązywanie kolejnych układów równań.

Aby odpowiednio dobierać przyrosty  $\{\delta\}$  należy wykorzystać jedną ze znanych metod przyrostowych. Przykładowe przedstawiono na rysunku poniżej:



Rysunek 4. Metoda Newtona – Raphsona (a) oraz zmodyfikowana metoda Newtona – Raphsona (b) [12]

Określone są one dla problemu rozwiązania równań nieliniowych postaci  $\psi(x) = 0$ . Jeśli próbna wartość  $x_n$  okaże się bliska wartości dokładnej, ale  $\psi(x_n) \neq 0$ , należy wprowadzić poprawkę

$$\Delta x_{n+1} = - \frac{\psi(x_n)}{\frac{d}{dx}\psi(x_n)}$$

i zastosować ją do wyznaczenia  $x_{n+1}$ :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

Postępowanie należy kontynuować iteracyjnie do momentu uzyskania zadowalającej zbieżności. Omówiona metoda nosi nazwę metody Newtona – Raphsona. Jej zbieżność przedstawia Rysunek 4a. Nazywana jest też metodą stycznych, co podkreśla sposób, za pomocą którego poszukiwane jest rozwiązanie. Istnieje także zmodyfikowana metoda Newtona – Raphsona Rysunek 4b. Od poprzedniej różni się zastosowaniem za każdym razem stałej stycznej. Stąd wzór poprawki przyjmuje postać:

$$\Delta x_{n+1} = -\frac{\psi(x_n)}{\frac{d}{dx}\psi(x_0)}$$

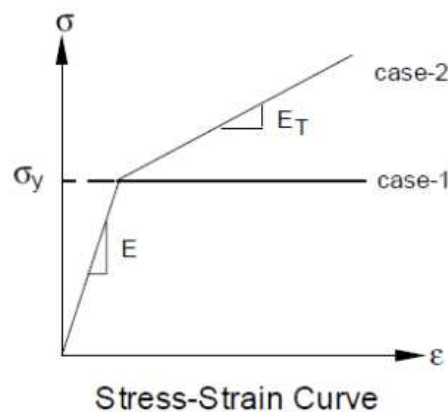
Formułując metodę Newtona dla problemu równania macierzowego przy pomocy rachunku wariacyjnego uzyskuje się wzór na przyrost wektora przemieszczeń  $\{\delta\}$ :

$$\Delta\{\delta\}_{n+1} = -[K_T]_n^{-1}\{\psi\}_n$$

gdzie  $[K_T]_n$  jest tzw. macierzą styczną obliczoną dla przemieszczeń i naprężeń uzyskanych dla próby  $\{\delta\}_n$ .

### MES – analiza nieliniowa ze względu na model materiału

Analogiczny tok postępowania można zastosować w nieliniowej fizycznie analizie MES – przyjmując nieliniowo sprężysty model materiału (Rysunek 5). Na przykładzie wspornika zginanego (Rysunek 6) ukazano wyniki analizy nieliniowej. W rozdziale tym przedstawiono także praktyczne problemy związane z jej stosowaniem.



Rysunek 5. Definicja zależności naprężeń od odkształceń w programie Cosmos/M [16]

Zastosowano elementy PLANE2D o parametrach:

$E = 200GPa$

$E_T = 2GPa$

$\sigma_y = 200MPa$  (umowna granica plastyczności)

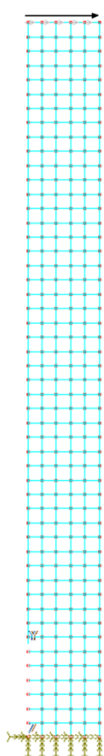
wymiary wspornika:  $0.1m \times 1m$

definicja naprężeń  $\sigma_y$  Hubera – Misesa

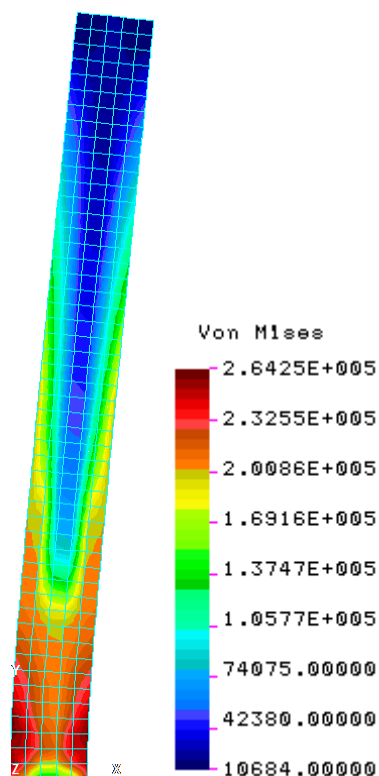
Obciążenie zdefiniowano w postaci siły równomiernie rozłożonej po krzywej na końcu wspornika, aby uniknąć lokalnych efektów działania siły skupionej. Sumaryczna wartość obciążenia: 1kN.

Wyznaczone wartości dot. 1mb konstrukcji, pracującej w płaskim stanie odkształcenia.

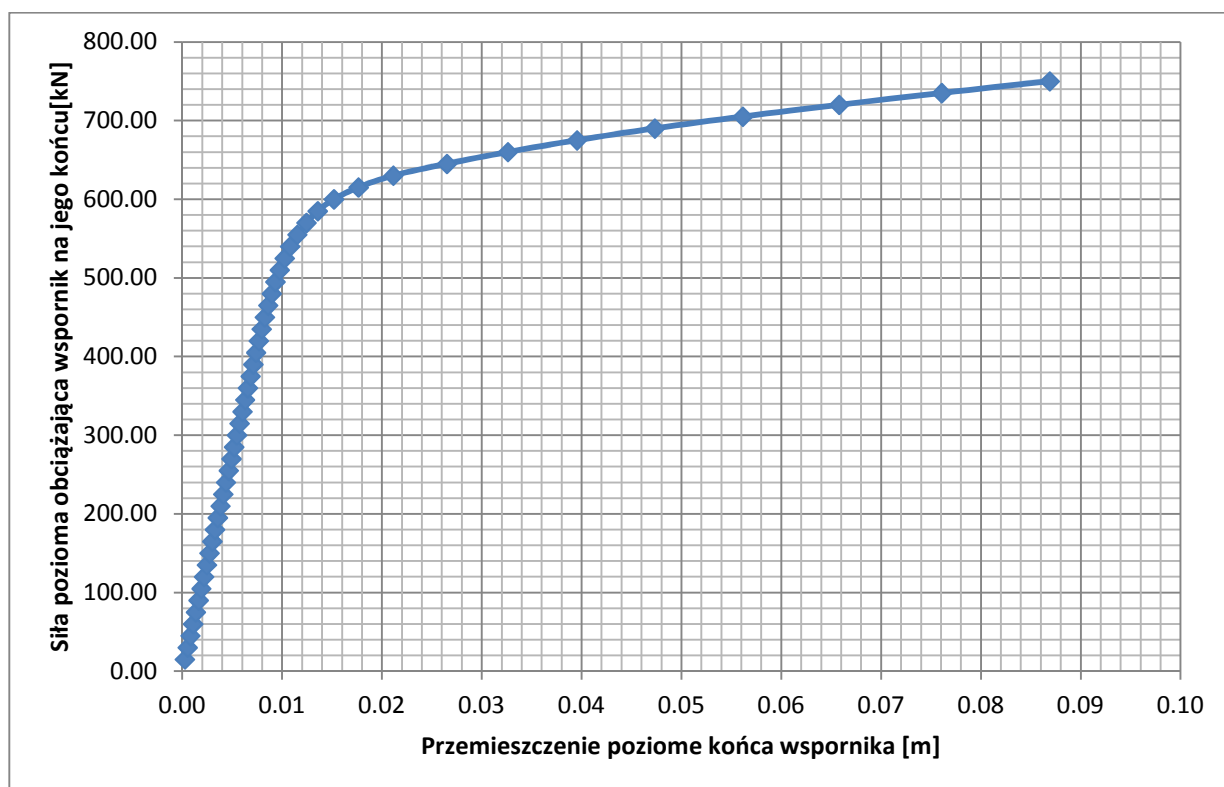
W analizie nieliniowej geometrycznie oraz fizycznie – uwzględniając model materiału (Rysunek 5) oraz wpływ dużych przemieszczeń – sterowano mnożnikiem obciążenia 1kN, obserwując zmiany przemieszczenia poziomego końca wspornika (Rysunek 6). Wynik tej analizy przedstawia Wykres 1.



Rysunek 6. Model wspornika, kierunek działania obciążenia



Rysunek 7. Przegub plastyczny powstały w wyniku działania siły 750 kN – rozkład naprężeń Misesa [kPa]



Wykres 1. Zależność poziomego przemieszczenia końca wspornika od przyłożonej na tym końcu siły poziomej

Wyniki analizy można zweryfikować wzorami analitycznymi, wyznaczając wartości wskaźnika plastycznego oraz sprężystego, a następnie odpowiadające momenty zginające. Wartości momentów co do wartości są równe sile przyłożonej do wspornika, ponieważ jego wysokość jest równa 1m.

$$M_{pl} = \frac{1m (0.1m)^2}{4} \sigma_y = 500kN \times 1m$$

$$M_{spr} = \frac{1m (0.1m)^2}{6} \sigma_y = 333kN \times 1m$$

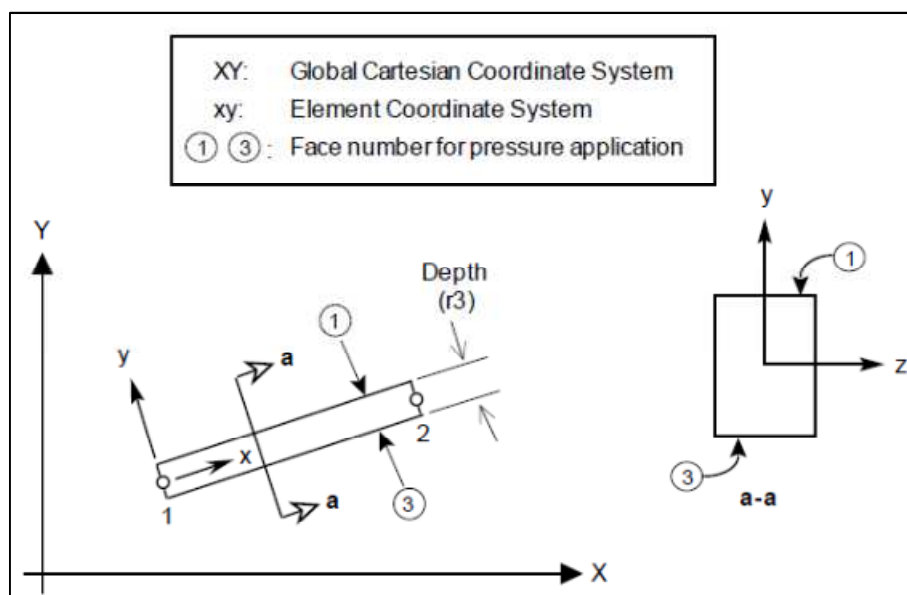
Rzeczywiście, na wykresie od obciążenia 500kN można zaobserwować nieproporcjonalny narastający przyrost przemieszczeń, co świadczy o uplastycznieniu całego przypodporowego przekroju wspornika. Pomiędzy obciążeniem 333kN a 500kN przekrój pracuje częściowo sprężysto. Po przekroczeniu 500kN powstaje przegub plastyczny (Rysunek 7), a naprężenia przekraczają  $\sigma_y$ .

Należy dodać, że pojęcie przegubu plastycznego w powyższym przykładzie jest pewnym przybliżeniem prawdziwego przegubu plastycznego – można by mówić o takim, gdyby  $E_T = 0$ .

Wprowadzenie takiego modelu jest jednak niemożliwe ze względu na brak zbieżności obliczeń programu Cosmos/M. Zalecane jest, aby  $E_T > 1/100 E$ , w innym przypadku występują problemy w działaniu algorytmów, a w konsekwencji niemożliwe jest uzyskanie wyników. Dlatego też, niestety w niniejszej pracy pominięto analizę fizycznie nieliniową MES. Z kilku przeanalizowanych przykładów wynika, że naprężenia w okładzinach stalowych w przypadku panelu przekraczają  $2\sigma_y$ , zanim wystąpi duży przyrost przemieszczeń przy niewielkim przyroście obciążenia. Naprężenia wielkości  $2\sigma_y$  są niedopuszczalne, zatem konieczne byłoby skorzystanie z innej metody analizy nieliniowości fizycznej.

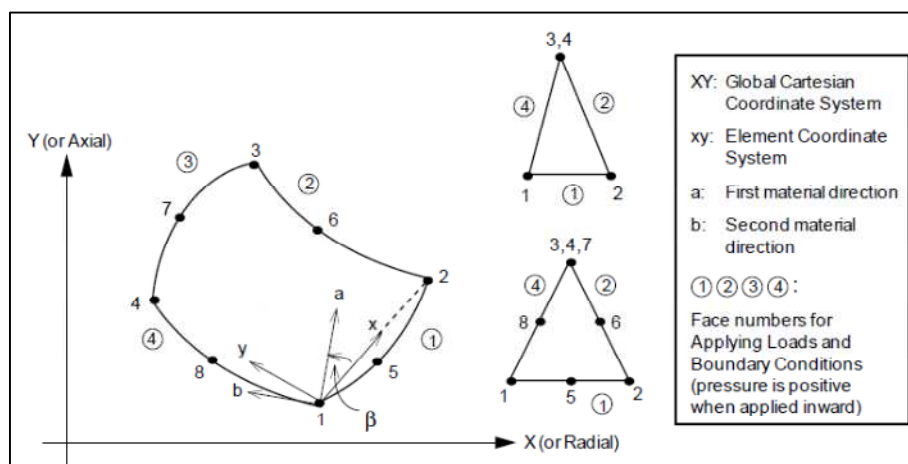
## Charakterystyka wykorzystywanych elementów skończonych

W rozdziale przedstawiono ogólne charakterystyki wykorzystanych w pracy elementów skończonych. Szczegółowe informacje znajdują się w [16]. Charakterystyki te są istotne ze względu na cel, aby model konstrukcji zdefiniowany przy pomocy elementów skończonych odzwierciedlał możliwie najdokładniej model rzeczywisty.



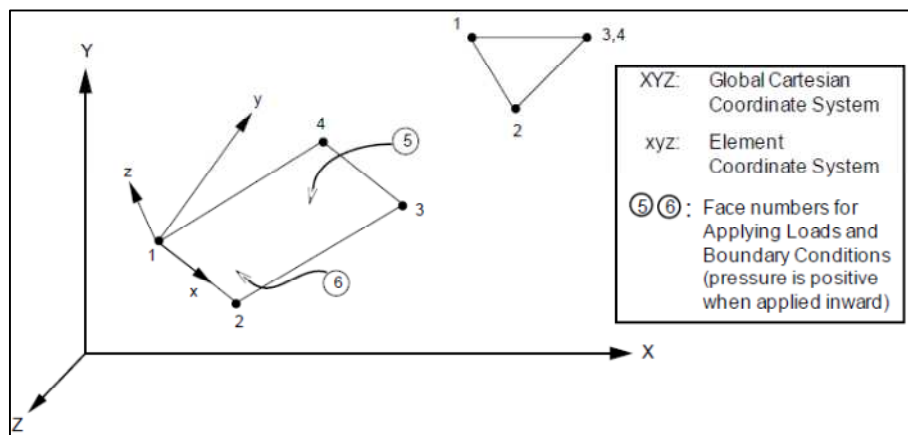
Rysunek 8. Element BEAM2D [16]

BEAM2D to 2 – węzłowy jednoosiowy element stosowany w dwuwymiarowych konstrukcyjnych modelach. Element posiada 3 stopnie swobody (2 translacyjne i 1 rotacyjny) w każdym węźle. Element musi być zdefiniowany w płaszczyźnie XY (Rysunek 8).



Rysunek 9. Element Plane2D [16]

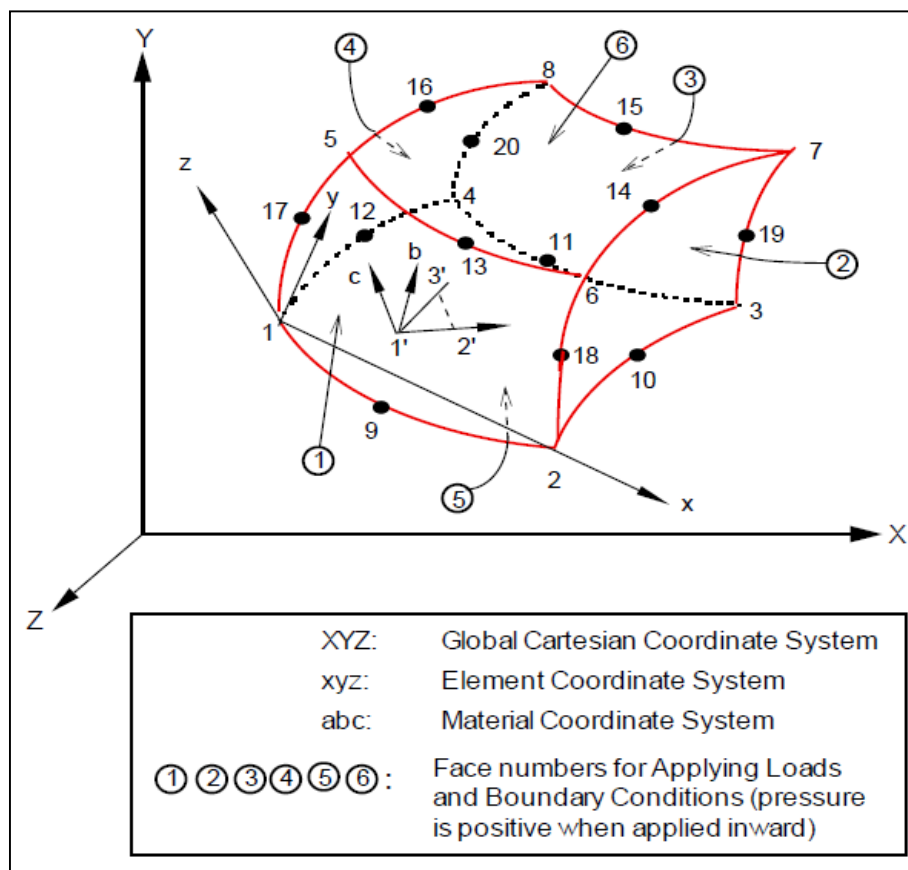
PLANE2D to 4- do 8- węzłowy dwuwymiarowy element stosowany w analizie nieliniowej w stanach płaskiego naprężenia, płaskiego odkształcenia bądź osiowosymetrycznym modelu konstrukcyjnym. Wszystkie elementy muszą być zdefiniowane w płaszczyźnie XY (Rysunek 9). Każdy węzeł posiada 2 translacyjne stopnie swobody.



Rysunek 10. Element SHELL4 [16]

SHELL4 to 4 – węzłowy czworoboczny element cienko – płytowy o nośności błonowej oraz giętnej, stosowany w analizie trójwymiarowych modeli konstrukcyjnych. Pominięto efekt odkształceń postaciowych. W analizie konstrukcyjnej uwzględnionych jest dla każdego węzła 6 stopni swobody (3 rotacyjne i 3 translacyjne).





Rysunek 11. Element SOLID[16]

SOLID to 8- do 20 – węzowy trójwymiarowy element, stosowany w analizie konstrukcyjnej. Uwzględnione są 3 translacyjne stopnie swobody dla każdego węzła.

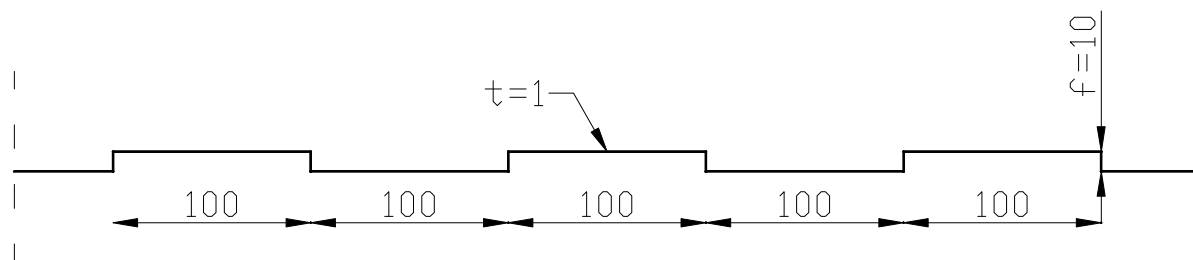
Wszystkie przedstawione powyżej elementy mogą zostać poddane analizie stateczności liniowej oraz analizie nieliniowej fizycznie oraz/albo geometrycznie.

# Analiza wyboczeniowa ściany warstwowej

## Analiza MES

### Założenia

Przyjęto, że okładziny ściany stanowią blachy trapezowe o uproszczonym modelu przedstawionym na rysunku (p. Rysunek 12).



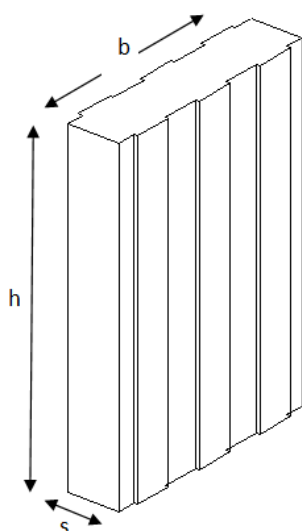
Rysunek 12. Przyjęty uproszczony model blachy trapezowej

Charakterystyki stali blachy trapezowej oraz materiału wypełnienia dla pierwszego obliczeniowego przykładu podano w tabeli poniżej:

Tabela 3. Zastosowane materiały oraz wykorzystane elementy skończone

|                  | Stałe sprężystości      | Typ elementu wykorzystany w MES |          |
|------------------|-------------------------|---------------------------------|----------|
|                  |                         | Model 2D                        | Model 3D |
| <b>Rdzeń</b>     | $E = 38MPa, \nu = 0.08$ | PLANE2D*                        | SOLID3D  |
| <b>Okładziny</b> | $E = 210GPa, \nu = 0.3$ | BEAM2D                          | SHELL4   |

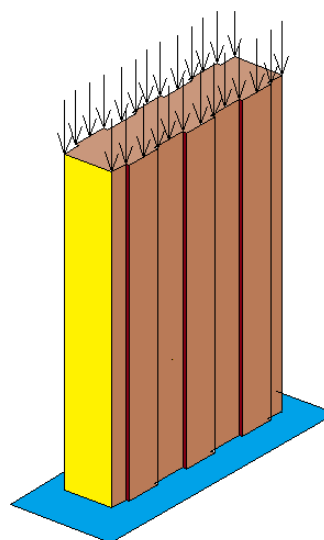
\* PLANE2D o płaskim stanie odkształcenia



Rysunek 13. Geometria ściany warstwowej

Przykładowe parametry:

$$\begin{aligned}h &= 2.5m \\b &= 1m \\s &= 25cm\end{aligned}$$



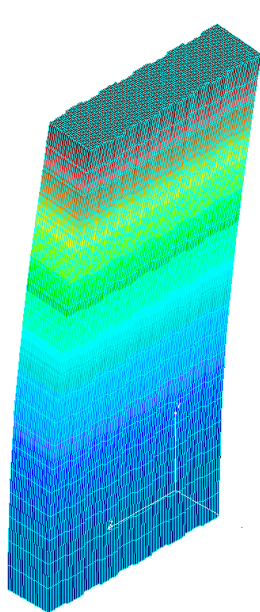
Rysunek 14. Sposób zamocowania oraz obciążenie

Ściana utwierdzona jest w sposób sztywny (Rysunek 14). Oczywiście, modelując ścianę rzeczywistą odpowiednie byłoby dodatkowe zastosowanie mocowania szczytu ściany, jednak dla zaobserwowania najbardziej niekorzystnych efektów wyboczeniowych celowo przyjęto przedstawiony sposób podparcia. Szczyt ściany został dodatkowo zwieńczony tym samym materiałem o grubości 1mm co blacha trapezowa w celu przybliżenia rzeczywistego

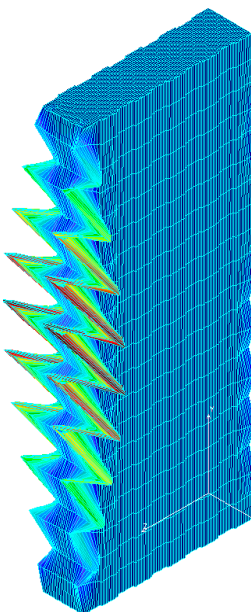
wykonania ściany, na której opiera się np. strop usztywniający szczyt konstrukcji. Obciążenie w postaci ciśnienia równomiernego zostało przyłożone do blachy trapezowej. Jego wartość sumaryczna wynosi 1kN.

### Uproszczenie modelu 3D do modelu 2D oraz jego konsekwencje

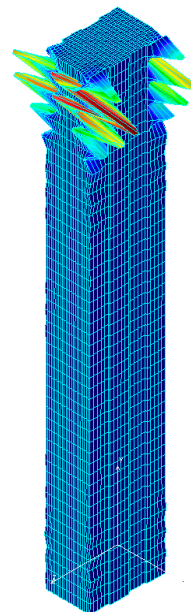
Wyniki analizy wyboczeniowej dla założonych parametrów geometryczno – wytrzymałościowych przedstawiają poniższe rysunki:



Rysunek 15. Pierwsza forma wyboczeniowa ściany, mnożnik obciążenia 1738



Rysunek 16. Druga forma wyboczeniowa ściany, mnożnik obciążenia 2448



Rysunek 17. Pierwsza forma wyboczeniowa ściany o szerokości 0.4m

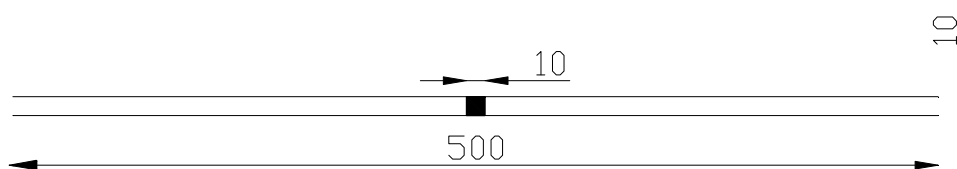
W analizie 2D przestrzenny model blachy trapezowej zastąpiono elementem liniowym BEAM2D o przekroju dwuteownika (Rysunek 18), w którym:

wysokość przekroju  $H = 10\text{mm}$

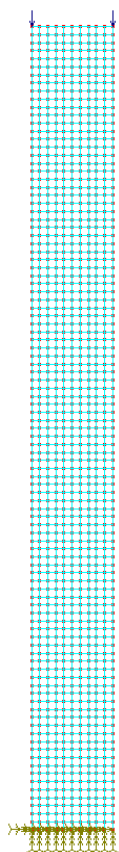
szerokość stopki  $B = \frac{1000\text{mm}}{2} = 500\text{mm}$

grubość stopki  $TH = 1\text{mm}$

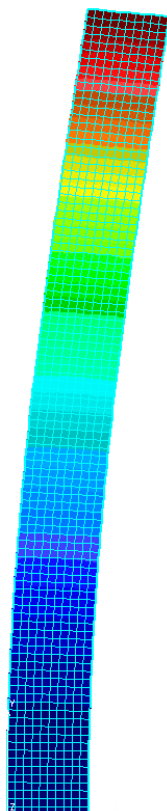
grubość środnika  $TB = 10 \times 1\text{mm} = 10\text{mm}$



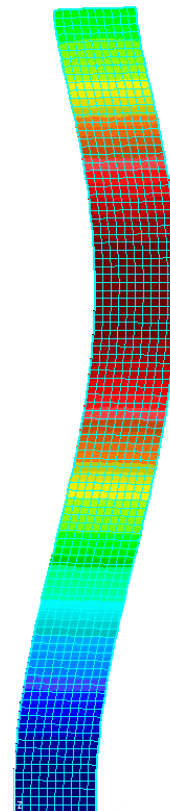
Rysunek 18. Dwuteownik o polu przekroju i momencie bezwładności takim jak 1m blachy trapezowej



Rysunek 19. Sposób zamocowania oraz obciążenie



Rysunek 20. Pierwsza forma wyboczeniowa ściany, mnożnik obciążenia 1731



Rysunek 21. Druga forma wyboczeniowa ściany, mnożnik obciążenia 3780

Obciążenie o wartości sumarycznej 1kN przyłożono do okładzin w postaci dwóch sił skupionych. Ściana utwierdzona w sposób sztywny (Rysunek 19). Model 2D odzwierciedla model przestrzenny, łącznie z przyjętym usztywnieniem szczytu ściany. Jak widać (Rysunek 15, Rysunek 20) wartości mnożnika obciążenia krytycznego dla pierwszej formy wyboczeniowej w analizie 3D oraz 2D są porównywalne (odpowiednio 1738 oraz 1731), co stanowi podstawę stosowania modelu 2D.

Założeniem, które należy przyjąć, stosując model 2D, jest „wystarczająca” długość ściany. W przeciwnym wypadku pierwszą formą wyboczeniową może być lokalne wyboczenie blachy na brzegach (Rysunek 17).

Należy pamiętać, że szukając kolejnych obciążeń krytycznych w modelu 2D, możemy pominąć formę wyboczenia 3D - im krótsza ściana tym ta możliwość jest bardziej prawdopodobna. Wniosek ten wynika z porównania drugiej formy wyboczeniowej analizy 3D i 2D (Rysunek 16 i Rysunek 17).

W analizie 3D występuje także problem lokalnego wyboczenia pasa blachy, czym szerzej zajmuje się autor[9], zarzucając wytycznym projektowania[17] (na których oparta jest norma europejska[4] dotycząca projektowania paneli warstwowych) zbyt małą wnikliwość badań na ten temat.

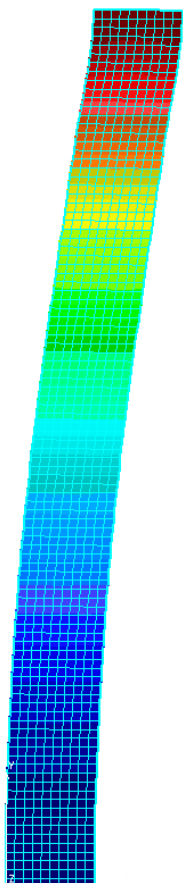
### Możliwość wyboczenia lokalnego blachy

Przed przystąpieniem do metody analitycznej znajdowania obciążenia krytycznego, należy rozważyć możliwość wyboczenia samej blachy. W metodzie analitycznej, gdzie

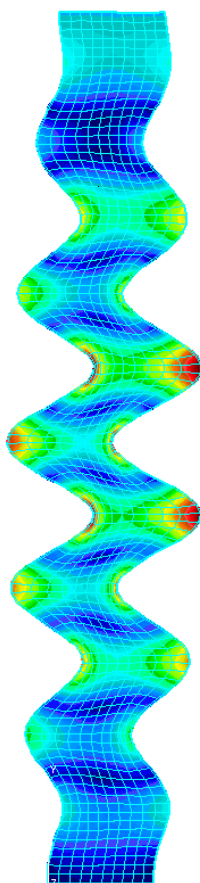
przyjmowany jest przekrój o zastępczych parametrach, wyznaczane obciążenie krytyczne dotyczy tylko wyboczenia globalnego.

Okazuje się, że dla rzeczywistych konstrukcji praktycznie nie ma potrzeby zajmowania się badaniem efektu lokalnego, czego dowodzi poniższy przykład.

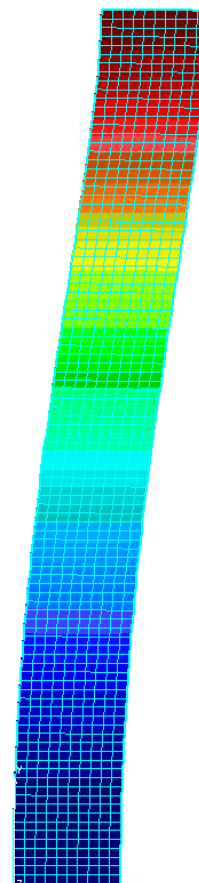
Dla wysokości 2.5m, stałych sprężystości stali (p. Tabela 2), rdzenia o parametrach obecnie stosowanych ( $E = 1MPa$ ,  $\nu = 0.25$ ) oraz możliwie najmniej sztywnej blachy trapezowej (o grubości 0.5mm [18] oraz  $f=2mm$ ) otrzymano następujące wyniki:



Rysunek 22. Pierwsza forma wyboczeniowa, szerokość 25cm (smukłość 10) mnożnik obciążenia 93, blacha  $f=2mm$



Rysunek 23. Pierwsza forma wyboczeniowa, szerokość 30cm (smukłość 8.3) mnożnik obciążenia 101, blacha  $f=2mm$



Rysunek 24. Pierwsza forma wyboczeniowa, szerokość 30cm (smukłość 8.3) mnożnik obciążenia 114, blacha  $f=4mm$

Na podstawie dwóch pierwszych rysunków (Rysunek 22 i Rysunek 23) można stwierdzić, że przy smukłości ściany mniejszej od 10 oraz przy najbardziej niekorzystnych warunkach geometryczno – wytrzymałościowych możliwe jest lokalne wyboczenie blachy trapezowej. Najczęściej jednak użyta blacha trapezowa ma większy moment bezwładności (Rysunek 24), ściana ma większą smukłość, itd. Dodatkowo zaobserwowano, że dla  $f=4mm$  efekt lokalnego wyboczenia (Rysunek 23) jest nieosiągalny nawet przy smukłości 6 i bardzo sztywnym materiale rdzenia ( $E=100MPa$ ). Dlatego można przyjąć, że ściana warstwowa w swej pierwszej formie wyboczenia doznaje globalnej utraty stateczności.

Osobnym zagadnieniem jest badanie zależności między wskaźnikiem zginania blachy a modułem Younga rdzenia. Ogólnie, im większy moduł Younga materiału rdzenia, tym większe prawdopodobieństwo, że gdy blachy są wiotkie (czyli  $f<4mm$  – można tak przyjąć na podstawie powyższego przykładu w zakresie rozpatrywanych zagadnień), to pierwszą formą

utrąty stateczności jest wyboczenie się blach. Mówiąc obrazowo – zbyt sztywny rdzeń powoduje niezapewnienie „współpracy wyboczeniowej” między okładzinami, w związku z czym wybaczają się one osobno i ściana doznaje lokalnej utraty stateczności.

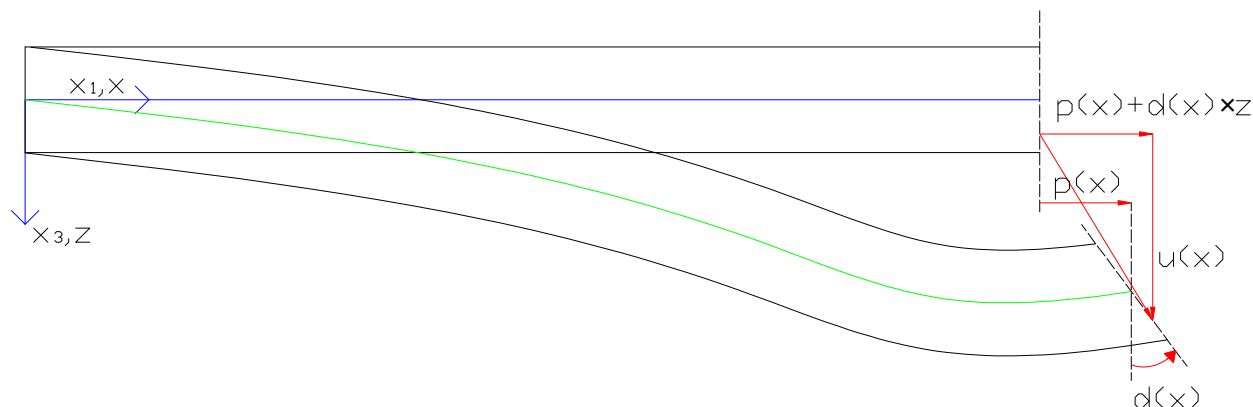
## Metoda analityczna

### Założenia

Rozpatrywane jest płaskie zagadnienie wyboczenia belki Timoshenki pod wpływem działania siły osiowej jako przybliżenie zjawiska wyboczenia ściany warstwowej. Taka analogia jest prawdziwa wtedy, gdy

- okładziny wraz ze rdzeniem odkształcają się jak włókna jednorodnej izotropowej belki (p. Rysunek 25) – założenie idealnej współpracy
- występują punktowe warunki podparcia ściany.

Oczywiście żadne z założeń w rzeczywistości nie jest spełnione, jednak okazuje się, że w zakresie badanych przypadków materiałowo – geometrycznych metoda analityczna dostarcza przydatnych wyników (p. *Porównanie wyników uzyskanych MES oraz analitycznie*).



Rysunek 25. Funkcje przemieszczeń  $u(x)$ ,  $p(x)$  oraz  $d(x)$  punktu materialnego

Funkcje przemieszczeń punktu materialnego w odpowiednich kierunkach mają postać:

$$u_1 = p(x) + z d(x)$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = u(x)$$

Oznaczenia przyjęte w dalszych obliczeniach (wszystkie parametry stałe na długości belki):

GA – sztywność poprzeczna

EI – sztywność giętna

N – siła osiowa ściskająca

Pominięto wpływ odkształcalności osiowej ( $EA \rightarrow \infty$ )

### Równanie energii pręta Timoshenki

Od tego momentu dla wygody uproszczono zapis:

$$\begin{cases} p(x) = p \\ d(x) = d \\ u(x) = u \end{cases}$$

Odpowiednie pochodne cząstkowe:

$$u_{1,1} = p' + z d'$$

$$u_{1,3} = d$$

$$u_{2,i} = 0 \text{ oraz } u_{i,2} = 0$$

$$u_{3,1} = u'$$

$$u_{3,3} = 0$$

Tensor odkształceń ma postać:  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ji}$

Elementy tensora odkształcenia (skreślone składniki są zerowe):

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) = p' + z d' + \frac{1}{2}((p' + z d')^2 + u'^2) \approx z d' + \frac{1}{2}u'^2 \\ &= e_{11}^L + e_{11}^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{13} &= \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) + \frac{1}{2}(u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}) = \frac{1}{2}(d + u') + \frac{1}{2}(p' + z d')d \\ &\approx \frac{1}{2}(d + u') = e_{13}^L \end{aligned}$$

Całkowita energia potencjalna sprężystości belki to suma energii sprężystej wewnętrznej skumulowanej przez belkę oraz pracy wykonanej przez siły zewnętrzne (tutaj siłę osiową). Zatem energię układu możemy podzielić na pracę naprężeń na odkształceniach liniowych ( $U^L$ ) oraz nieliniowych ( $U^N$ ), co wyraża wzór:

$U = U^L + U^N$ , gdzie (pamiętając, że  $e_{13} = e_{31}$ ):

$$\begin{aligned} U^L &= \frac{1}{2} \int_V e_{ij}^L \sigma_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V e_{11}^L \sigma_{11} dV + \frac{1}{2} \int_V e_{13}^L \sigma_{13} dV + \frac{1}{2} \int_V e_{31}^L \sigma_{31} dV = \frac{1}{2} \int_V e_{11}^L \sigma_{11} dV \\ &\quad + \int_V e_{13}^L \sigma_{13} dV = \frac{1}{2} \int_l M d' dx + \frac{1}{2} \int_l T (d + u') dx \end{aligned}$$

$$U^N = \int_V e_{ij}^N \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_l e_{11}^N \sigma_{11} dx = - \int_l N \frac{1}{2} u'^2 dx = - \frac{1}{2} N \int_l u'^2 dx$$

Z prawa Hooke'a:

$$\begin{cases} M = EI d' \\ T = \kappa^{-1} GA (d + u') = GA (d + u') \end{cases}$$

gdzie  $\kappa$  – współczynnik uwzględniający nierównomierność rozkładu naprężenia, w przypadku „długiej” ściany przyjęto równomierny rozkład ( $\kappa = 1$ )

Zatem

$$U^L = \frac{1}{2} EI \int_l d'^2 dx + \frac{1}{2} GA \int_l (d + u')^2 dx$$

$$U^N = -\frac{1}{2} N \int_l u'^2 dx$$

Ostatecznie więc:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_l d'^2 dx + \frac{1}{2} GA \int_l (d + u')^2 dx - \frac{1}{2} N \int_l u'^2 dx$$

Ponieważ stan równowagi stabilnej występuje wtedy, gdy energia potencjalna jest minimalna zatem konieczne jest spełnienie warunku:

$$\delta U = 0 \leftrightarrow 2\delta U = 0$$

$$EI \int_l d' \delta d' dx + GA \int_l (d + u') \delta (d + u') dx - N \int_l u' \delta u' dx = 0$$

$$-EI \int_l d'' \delta d dx + GA \int_l (d + u') \delta d dx - GA \int_l (d' + u'') \delta u dx + N \int_l u'' \delta u dx = 0$$

Zatem:

$$\begin{cases} -EI d'' + GA d + GA u' = 0 \\ -GA d' - GA u'' + N u'' = 0 \end{cases}$$

## Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem powyższego układu równań różniczkowych są funkcje ugięcia oraz obrotu belki Timoshenki:

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}}{2N\sqrt{EIGAN(N-GA)}} \left( EI \left( \left( -1 + e^{\frac{GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}} \right)^2 \sqrt{EIGAN(N-GA)} c_1 - \left( -1 + e^{\frac{2GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}} \right) GA(GA - N)(c_2 + c_3) \right) - 2e^{\frac{GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}} \sqrt{(EIGAN(N-GA)) (GAx(c_2 + c_3) - N(xc_2 + c_4))} \right)$$

$$d(x) = \frac{e^{-\frac{GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}}{2GAN} \left( \left( -1 + e^{\frac{2GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}} \right) \sqrt{EIGAN(N-GA)} c_1 + GA \left( -e^{\frac{2GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}} (GA - N)(c_2 + c_3) - (GA - N)(c_2 + c_3) + 2e^{\frac{GANx}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}} (GA(c_2 + c_3) - Nc_2) \right) \right)$$

## Wyznaczenie wzorów na siły krytyczne dla różnych warunków podparcia

Aby wyznaczyć funkcje ugięcia oraz obrotu potrzebne są 4 równania, ponieważ właśnie tyle jest nieznanymi stałymi w tych funkcjach. Ułożenie 4. warunków



brzegowych pozwala więc na wyznaczenie tych funkcji. Dla każdego końca belki można sformułować 2 warunki brzegowe. „i”-te z tych równań można zapisać w postaci:

$$A_{i,1} c_1 + A_{i,2} c_2 + A_{i,3} c_3 + A_{i,4} c_4 = 0$$

Wszystkie równania powstałe poprzez sformułowanie warunków brzegowych za pomocą przedstawić macierzowo:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ poszukiwane jest rozwiązanie nietrywialne, tzn. takie, że funkcje  $u(x)$  oraz  $d(x)$  nie są zerowe (bo wtedy występuje właśnie wyboczenie), a więc wektor stałych  $C$  nie jest wektorem zerowym. Zatem musi być spełnione  $\det(A) = 0$ . Stąd zerowanie się wyznacznika prowadzi już bezpośrednio do wyznaczenia wzoru na siłę krytyczną. W kolejnych tabelach (Tabela 4, Tabela 5) przedstawiono dla zadanych warunków podparcia:

- warunki brzegowe,
- macierze  $A$ ,
- wyznaczniki macierzy  $A$ ,
- siły krytyczne

zgodnie z objaśnionym wcześniej tokiem postępowania.

O ile warunki brzegowe dla przegubu oraz utwierdzenia sztywnego nie wymagają komentarza, warto wyjaśnić równanie dla końca o swobodnym przesuwie poprzecznym. Kąt obrotu osi belki jest opisany funkcją  $u'(x)$ . Zatem siła tnąca na tym końcu pręta wyraża się wzorem  $T = N u'$ , a ponieważ  $T = GA(d + u')$ , to:

$$GA(d + u') = N u' \leftrightarrow GA(d(l) + u'(l)) - N u'(l) = 0$$

Dla wyznacznika każdej macierzy  $A$  istnieje nieskończenie wiele  $N$ , dla których  $\det(A)=0$ . Takie wartości  $N$  to kolejne siły krytyczne. Aby rozwiązać równanie  $\det(A)=0$  należy skorzystać z faktu, że  $\sinh(ix) = i \sin(x)$  oraz  $\cosh(ix) = \cos(x)$ . Aby wyłączyć liczbę zespoloną „i” wewnątrz tych funkcji hiperbolicznych musi być spełnione  $N < GA$  dla każdego wyznacznika. Wpływa stąd istotny wniosek, że jeżeli wartość siły osiowej  $N > GA$  to nie wystąpi wyboczenie. Można zauważyć także, że kiedy  $GA \rightarrow \infty$ , uzyskany wzór jest taki sam, jak dla belki Eulera – Bernoulliego, czego należało się spodziewać, ponieważ belka Eulera-Bernoulliego jest szczególnym przypadkiem belki Timoshenki:

$$P_{kr,1} = \frac{EI GA \pi^2}{\mu^2 GA l^2 + EI \pi^2} = \frac{EI \pi^2}{\mu^2 l^2 + \frac{EI}{GA} \pi^2}$$

$$\frac{P_{kr,1}}{GA \rightarrow \infty} = \frac{EI \pi^2}{\mu^2 l^2 + 0} = \frac{EI \pi^2}{\mu^2 l^2}, \text{ gdzie } \mu - \text{współczynnik wyboczeniowy}$$

Jak wspomniano, istnieje nieskończenie wiele sił krytycznych i odpowiadających im form wyboczenia, jednak dla niektórych przypadków nie można wyznaczyć ścisłego wzoru z powodu uwikłania wartości siły osiowej  $N$  w równaniu  $\det(A)=0$ . Dlatego w tych przypadkach w tabeli (p. Tabela 5) podano tylko wzory na  $P_{kr,1}$ .

Tabela 4. Macierze układów równań oraz warunki brzegowe dla różnych sposobów podparcia ściany

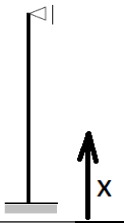
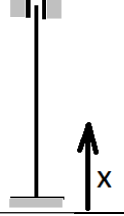
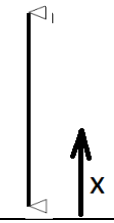
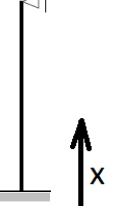
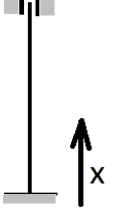
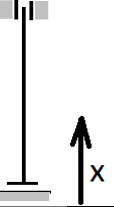
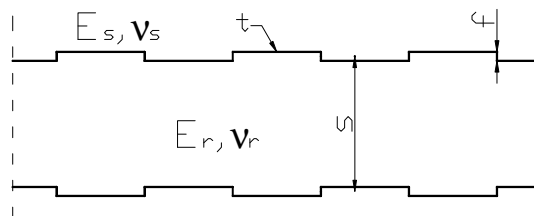
| Podparcie                                                                           | Warunki brzegowe                               | Macierz A układu równań dla zadanych warunków brzegowych                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $d'(0) = 0$<br>$u(0) = 0$                      | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & \frac{\sqrt{GAN(N-GA)}}{EI} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & \frac{\sqrt{GAN(N-GA)}}{EI} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & 0 \\ \frac{EI \left( \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - 1 \right)}{N} - \frac{GAl}{N} + l + \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{N^2} & \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - GAIN}{N^2} & 1 \end{pmatrix}$                                  |
|                                                                                     | $d'(l) = 0$<br>$u(l) = 0$                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|    | $u(0) = 0$<br>$d(0) = 0$                       | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & \frac{\sqrt{GAN(N-GA)}}{EI} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & \frac{\sqrt{GAN(N-GA)}}{EI} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & 0 \\ 0 & GA - N & GA & 0 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                                                                                     | $d'(l) = 0$<br>$GA(d(l) + u'(l)) - Nu'(l) = 0$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|    | $u(0) = 0$<br>$d(0) = 0$                       | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & \frac{\sqrt{GAN(N-GA)}}{EI} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & \frac{\sqrt{GAN(N-GA)}}{EI} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) & 0 \\ \frac{EI \left( \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - 1 \right)}{N} - \frac{GAl}{N} + l + \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{N^2} & \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - GAIN}{N^2} & 1 \end{pmatrix}$                                  |
|                                                                                     | $d'(l) = 0$<br>$u(l) = 0$                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|   | $u(0) = 0$<br>$d(0) = 0$                       | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{EI \left( \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - 1 \right)}{N} - \frac{GAl}{N} + l + \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{N^2} & \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - GAIN}{N^2} & 1 \\ \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{GAN} & \frac{(GA-N) \left( \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - 1 \right)}{N} & \frac{GA + (N-GA) \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{N} & 0 \end{pmatrix}$ |
|                                                                                     | $u(l) = 0$<br>$d(l) = 0$                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|  | $GA(d(0) + u'(0)) - Nu'(0) = 0$<br>$d(0) = 0$  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{EI \left( \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - 1 \right)}{N} - \frac{GAl}{N} + l + \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{N^2} & \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - GAIN}{N^2} & 1 \\ \frac{\sqrt{EIGAN(N-GA)} \sinh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{GAN} & \frac{(GA-N) \left( \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right) - 1 \right)}{N} & \frac{GA + (N-GA) \cosh\left(\frac{GAIN}{\sqrt{EIGAN(N-GA)}}\right)}{N} & 0 \end{pmatrix}$ |
|                                                                                     | $u(l) = 0$<br>$d(l) = 0$                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

Tabela 5. Wyznaczniki macierzy A (p. Tabela 4) oraz odpowiadające siły krytyczne

| Podparcie                                                                           | Wyznacznik macierzy A                                                                            | Siły krytyczne                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $\frac{GA l (GA - N) \sinh\left(\frac{GA l N}{\sqrt{E I G A N (N - GA)}}$                        | $P_{kr} = \frac{E I G A n^2 \pi^2}{GA l^2 + E I n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$                     |
|    | $(N - GA) \cosh\left(\frac{GA l N}{\sqrt{E I G A N (N - GA)}}$                                   | $P_{kr} = \frac{E I G A (2 \pi n + \pi)^2}{2^2 GA l^2 + E I (2 \pi n + \pi)^2}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$ |
|    | $\frac{l (GA - N) N \cosh\left(\frac{GA l N}{\sqrt{E I G A N (N - GA)}}$                         | $P_{kr,1} = \frac{E I G A \pi^2}{0.699^2 GA l^2 + E I \pi^2}$                                            |
|   | $- \frac{(GA - N) \left( -2 E I G A + 2 E I \cosh\left(\frac{GA l N}{\sqrt{E I G A N (N - GA)}}$ | $P_{kr,1} = \frac{E I G A \pi^2}{0.5^2 GA l^2 + E I \pi^2}$                                              |
|  | $\frac{E I (N - GA)^{3/2} \sinh\left(\frac{GA l N}{\sqrt{E I G A N (N - GA)}}$                   | $P_{kr} = \frac{E I G A n^2 \pi^2}{GA l^2 + E I n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$                     |

## Wyznaczenie sił krytycznych dla ściany warstwowej

Aby wyznaczyć siłę krytyczną dla danej ściany warstwowej należy wyznaczyć parametry sztywności zastępczej GA oraz EI.



Rysunek 26. Przekrój poprzeczny ściany oraz stałe materiałowe rdzenia i okładzin

Przyjęto, że sztywność giętą ściany zapewniają stalowe okładziny, zaś sztywność poprzeczną materiał rdzenia. EI wyznaczono z twierdzenia Steiner'a pomijając bezwładność okładzin względem własnej osi. EI oraz GA wyznaczono na 1mb ściany:

$$EI = E_s 2 \frac{b t}{2} \left( \left[ \frac{s}{2} + \frac{f}{2} \right]^2 + \left[ \frac{s}{2} - \frac{f}{2} \right]^2 \right) = E_s \frac{t(s^2 + f^2)}{2}$$
$$GA = G_r s = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)} s$$

Podstawiając powyższe wartości EI oraz GA do odpowiedniego wzoru (p. Tabela 5) otrzymuje się wartości sił krytycznych dla kolejnych form wyboczeniowych.

## Porównanie wyników uzyskanych MES oraz analitycznie

Najlepszą dostępną autorowi metodą zweryfikowania wzorów analitycznych jest modelowanie zagadnienia MES. Weryfikację wykonano dla wszystkich warunków podparcia oraz, tam gdzie istnieje ścisły wzór, dla trzech pierwszych form wyboczeniowych. Za przykład posłużyła ściana o wysokości  $h=2.5\text{m}$ , szerokości  $b=0.25\text{m}$ , blaszce trapezowej stalowej ( $f=10\text{mm}$ ) oraz parametrach rdzenia  $E=38\text{MPa}$ ,  $\nu=0.25$ .

Wyniki analityczne uzyskano zgodnie z postępowaniem opisanym w poprzednich rozdziałach, zaś modelowanie MES przeprowadzono analogicznie jak wcześniej (p. *Uproszczenie modelu 3D do modelu 2D oraz jego konsekwencje*), z tą różnicą, że w definicji elementu BEAM2D ręcznie wprowadzono pole przekroju oraz moment bezwładności, pomijając pole i bezwładność „środnika” (p. Rysunek 18). Przyczyną tego jest pominięcie „środnika” we wzorach na EI oraz GA w metodzie analitycznej. Zmiana ta jest poczyniona tylko dla ścisłości, jednak wpływ owego pominięcia dla wyników MES jest niemal niezauważalny.

Tabela 6. Porównanie wyników uzyskanych MES oraz analitycznie

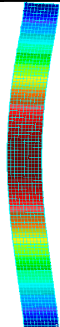
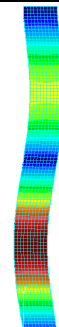
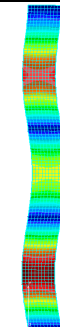
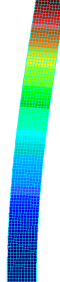
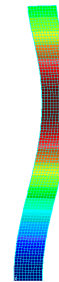
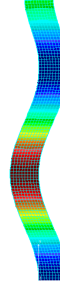
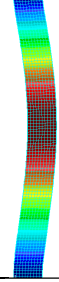
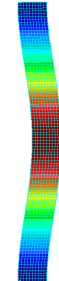
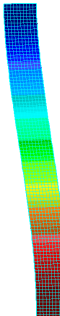
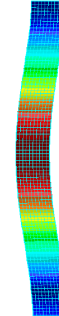
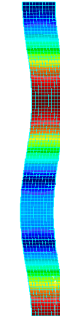
| Sposób podparcia                                                                    | $F_{kr}$ wyznaczona analitycznie                                                             | $F_{kr}$ wyznaczona MES                                                                      | Różnica              | Kolejne formy wyboczenia                                                              |                                                                                       |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $F_{kr,1} = 2782 \text{ kN}$<br>$F_{kr,2} = 3481 \text{ kN}$<br>$F_{kr,3} = 3651 \text{ kN}$ | $F_{kr,1} = 3084 \text{ kN}$<br>$F_{kr,2} = 3586 \text{ kN}$<br>$F_{kr,3} = 3758 \text{ kN}$ | 10.9%<br>3%<br>2.9%  |    |    |    |
|    | $F_{kr,1} = 1542 \text{ kN}$<br>$F_{kr,2} = 3268 \text{ kN}$<br>$F_{kr,3} = 3590 \text{ kN}$ | $F_{kr,1} = 1565 \text{ kN}$<br>$F_{kr,2} = 3329 \text{ kN}$<br>$F_{kr,3} = 3673 \text{ kN}$ | 1.5%<br>1.9%<br>2.3% |    |    |    |
|   | $F_{kr,1} = 3223 \text{ kN}$                                                                 | $F_{kr,1} = 3115 \text{ kN}$                                                                 | 3.5%                 |   |                                                                                       |                                                                                       |
|  | $F_{kr,1} = 3481 \text{ kN}$                                                                 | $F_{kr,1} = 3470 \text{ kN}$                                                                 | 0.3%                 |  |                                                                                       |                                                                                       |
|  | $F_{kr,1} = 2782 \text{ kN}$<br>$F_{kr,2} = 3481 \text{ kN}$<br>$F_{kr,3} = 3651 \text{ kN}$ | $F_{kr,1} = 2656 \text{ kN}$<br>$F_{kr,2} = 3474 \text{ kN}$<br>$F_{kr,3} = 3707 \text{ kN}$ | 4.7%<br>0.2%<br>1.5% |  |  |  |

Tabela 6 przedstawia różnice (względem mniejszego wyniku) w wartościach sił krytycznych otrzymanych MES oraz analitycznie. Poniżej omówiono przyczyny powstania tych rozbieżności.



Ciągły sposób podparcia (Rysunek 27, Rysunek 28) oraz już wcześniej opisane założenie idealnej współpracy między rdzeniem a okładzinami wpływają między innymi na różnicę wartości między siłami krytycznymi wyznaczonymi analitycznie a wyznaczonymi MES.

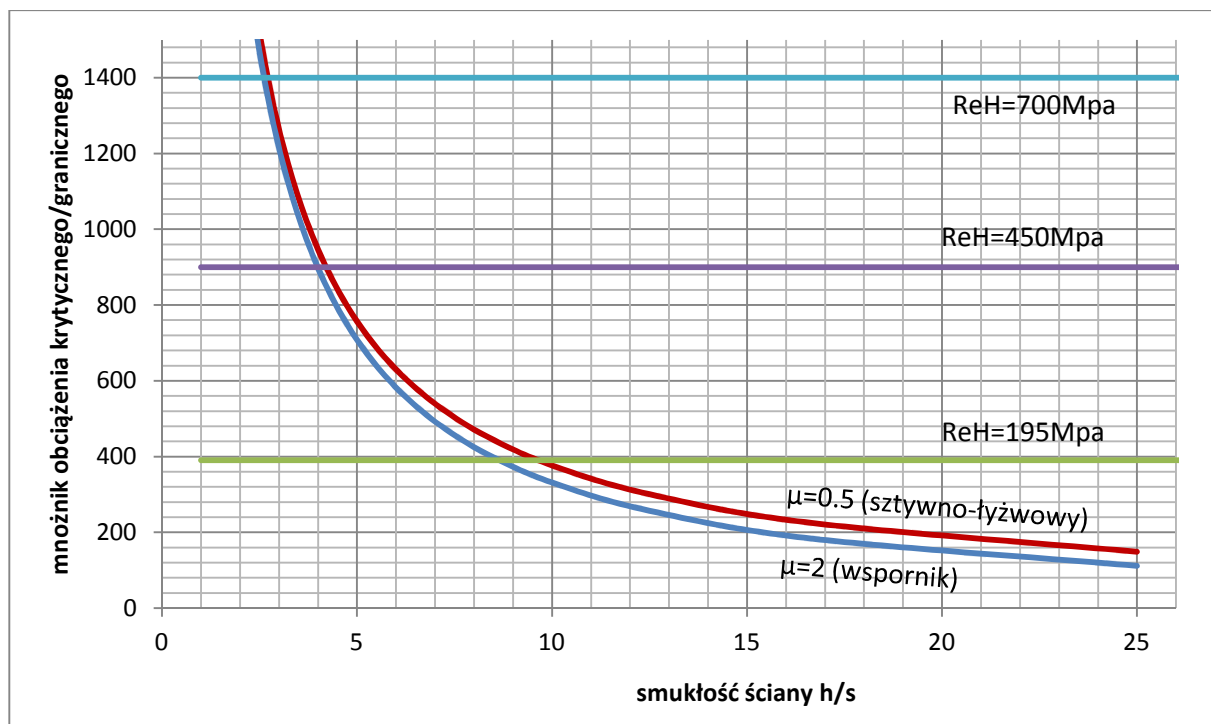
W miarę wzrostu momentu bezwładności blachy (a więc parametru  $f - p$ , Rysunek 12) różnica siły krytycznej wyznaczonej MES oraz analitycznie jest coraz większa. Dla  $f=2\text{mm}$  wyniki prawie się pokrywają. Rozbieżność wyników, gdy  $f$  rośnie, spowodowana jest „coraz większym” odstępstwem od założonego warunku idealnej współpracy rdzenia i okładzin. Idealna współpraca zachodzi wtedy, gdy wartości sił krytycznych dla globalnej i lokalnej utraty stateczności są zbliżone (p. *Możliwość wyboczenia lokalnego blachy*). Niemniej jednak, analityczne wzory mogą posłużyć do wstępnego oszacowania siły krytycznej w ścianie warstwowej.

## Wykresy nośności ścian w zależności od smukłości oraz zastosowanego materiału rdzenia

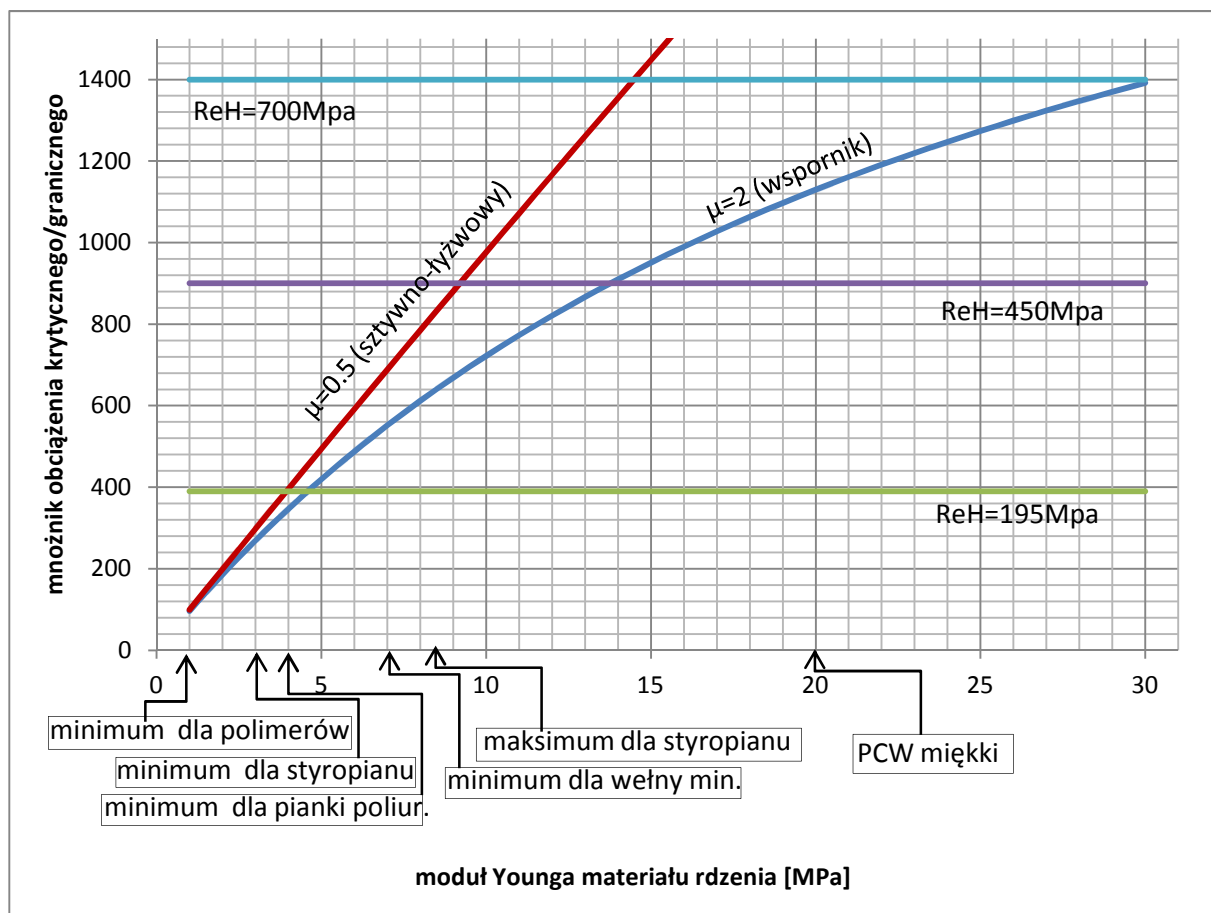
Z praktycznego punktu widzenia użyteczne wydaje się stwierdzenie co pierwsze decyduje o utracie nośności – wyboczenie ściany (mnożnik obciążenia krytycznego) czy uplastycznienie okładzin stalowych (mnożnik obciążenia granicznego). Na przykładzie ściany o parametrach:  $\nu_r = 0.25, E_r = 3.8\text{MPa}, s = 0.25\text{m}, h = 2.5\text{m}$  stworzono wykresy, które odpowiadają na postawione pytanie. Przyjęto blachę stalową jak wcześniej (Rysunek 12,  $f=10\text{mm}$ ). Ścianę obciążono siłami przyłożonymi do blach o wartości sumarycznej  $1\text{kN}$  (Rysunek 19).

Wykresy wyboczenia (pierwszej formy) dla ściany podpartej w sposób wspornikowy ( $\mu=2$ ) oraz w sposób sztywno – łożwowy ( $\mu=0.5$ ) stworzono przy pomocy wzorów analitycznych (p. Tabela 5). Zakres pomiędzy tymi wykresami wypełniają wykresy pozostałych sposobów podparcia, ponieważ wszystkie współczynniki wyboczeniowe zawierają się w przedziale  $[0.5, 2]$ .

Mnożniki obciążenia granicznego wyznaczono, zakładając, że tylko stal przenosi ściskanie. Stąd wartość mnożnika wyraża się wzorem  $2 \times t \times 1mb \times R_{eH}$  (pominięcie powierzchni „średników”). Założono, że wyczerpanie nośności zachodzi w momencie przekroczenia naprężeń  $R_{eH}$ , będących granicą stosowalności prawa Hooke’a – proporcjonalności naprężeń do odkształceń.



Wykres 2. Zależność mnożnika obciążenia krytycznego/granicznego od smukłości ściany



Wykres 3. Zależność mnożnika obciążenia krytycznego/granicznego od modułu Younga rdzenia (dokładne wartości modułów zawiera Tabela 9)

## Wnioski

Na podstawie powyższych wykresów można zauważyć, że o utracie nośności dla większości ścian (czyli smukłości powyżej 9 oraz parametru stali  $R_{eH} > 195MPa$ ), przy założonym polistyrenowym rdzeniu (Wykres 2), będzie decydować analiza wyboczeniowa. Faktu tego nie można pominąć, projektując ścianę. Maksymalna różnica wartości obciążenia krytycznego (pamiętając, że mnożnik dotyczy siły o wartości 1kN) dla różnych warunków podparcia wynosi 40kN.

Natomiast zależność formy utraty nośności od zastosowanego materiału rdzenia (Wykres 3) nie jest tak jednoznaczna. Im sztywniejszy rdzeń, tym większa różnica obciążenia krytycznego dla różnych warunków podparcia (nawet 500kN). Dla bardziej wiotkich materiałów rdzenia, o utracie nośności decydować będzie obciążenie graniczne, zaś dla sztywniejszych materiałów – obciążenie krytyczne.



## Analiza nośności MES panelu zakrzywionego

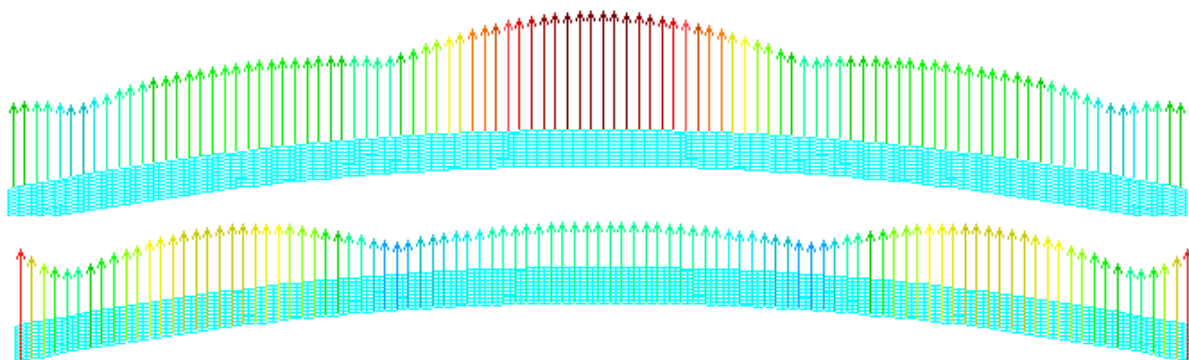
### Cel, założenia modelowe

Celem analizy nośności panelu zakrzywionego metodą elementów skończonych jest wywnioskowanie, kiedy jaka przyczyna wywołuje jako pierwsza utratę nośności, a w związku z tym, kiedy należy stosować odpowiednią metodę modelowania w celu wyznaczenia obciążenia krytycznego/granicznego.

Do zamodelowania panelu przyjęto parametry na podstawie tabeli (p. Tabela 2). Założono:

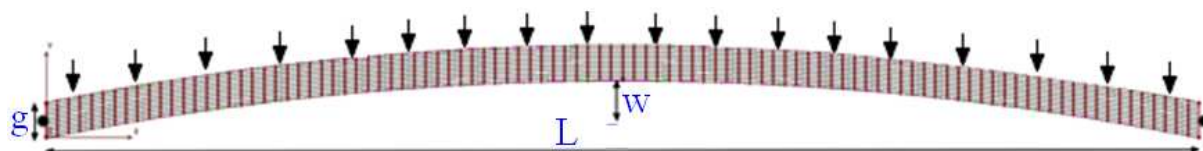
- Rdzeń styropianowy:  $E = 3.8MPa$ ,  $\nu = 0.08$  (dane z badań doświadczalnych [9])  
Zastosowany typ elementu: PLANE2D
- Okładziny z blachy trapezowej stalowej:  $E = 210GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $R_{eH} = 195MPa$   
Parametry geometryczne blachy przyjęto jak wcześniej (p. Rysunek 12)  
Zastosowany typ elementu: BEAM2D

Przeprowadzono kolejne analizy panelu o takich samych parametrach geometrycznych i wytrzymałościowych w celu wyznaczenia obciążeń granicznych/krytycznych. W każdej z analiz, najbardziej wyężoną częścią panelu jest środek blachy trapezowej górnej lub krańce w zależności od typu analizy. Przykładowy względny rozkład naprężeń, przy maksymalnym możliwym obciążeniu w analizie nieliniowej ze względu na przemieszczenia, przedstawia Rysunek 29.



Rysunek 29. Rozkład naprężeń Misesa w blasze górnej oraz dolnej

Parametry, które w dalszych analizach będą stosowane, a ich wartości modyfikowane przedstawiono poniżej:



Rysunek 30. Geometria panelu zakrzywionego – przegubowy sposób podparcia

W kolejnych rozdziałach do przykładowych analiz przyjęto panel o parametrach:

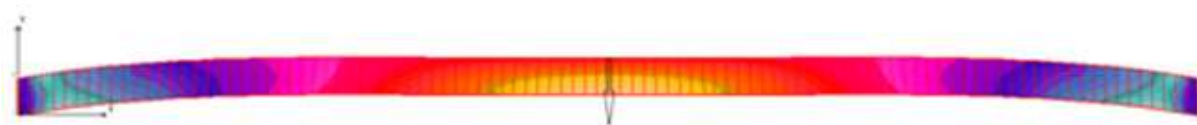
*grubość*  $g = 15cm$

*wyniosłość*  $w = 25cm$

*rozpiętość*  $L = 5m$

obciążenie:  $1kN/m$  przed zrzutowaniem na panel (w poziomie)

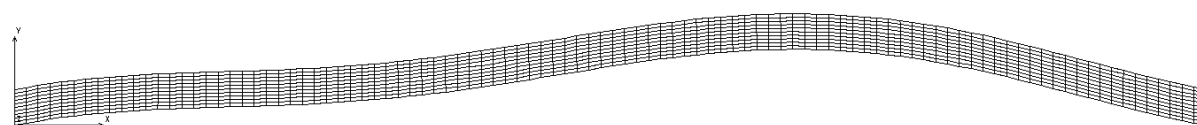
W analizie nieliniowej ze względu na duże przemieszczenia, śledzone jest przemieszczenie pionowe środkowego punktu panelu (więcej - p. *Analiza nieliniowa ze względu na duże przemieszczenia* ), co ukazuje Rysunek 31.



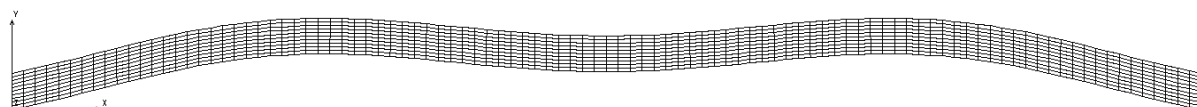
Rysunek 31. Punkt środkowy okładziny górnej – pionowe przemieszczenie jest analizowane w zależności od obciążenia panelu

### Stateczność liniowa

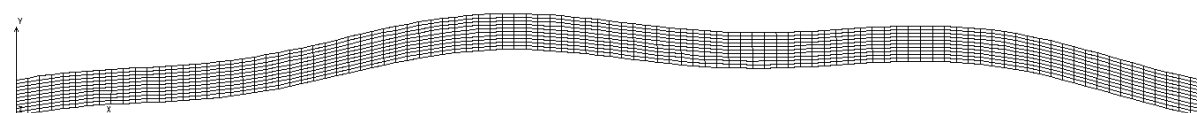
Pierwszym rodzajem analizy jest badanie stateczności liniowej panelu, czyli poszukiwanie obciążenia krytycznego. Wyniki tej analizy (siły krytyczne wraz z formami wyboczeniowymi) zestawiono poniżej:



Rysunek 32. Pierwsza forma wyboczeniowa, mnożnik obciążenia 11.6



Rysunek 33. Druga forma wyboczeniowa, mnożnik obciążenia 12.6

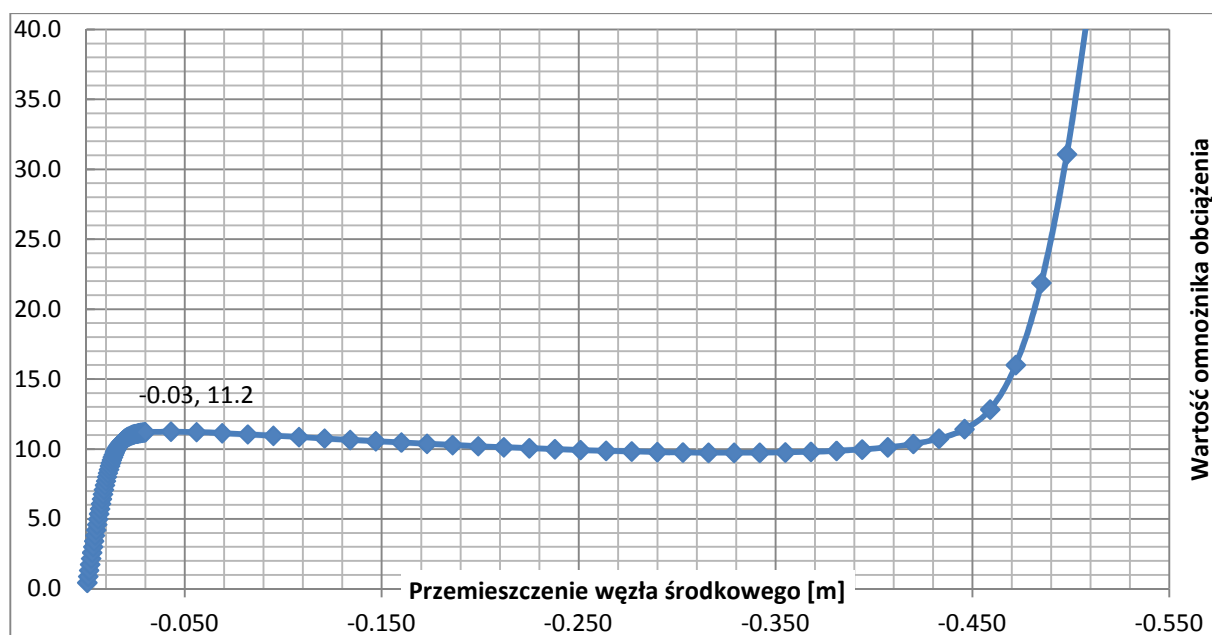


Rysunek 34. Trzecia forma wyboczeniowa, mnożnik obciążenia 14.1

Charakterystyczny dla przeprowadzonej analizy jest brak wartości przemieszczeń, a jedynie forma przemieszczenia (p. *Stateczność liniowa*).

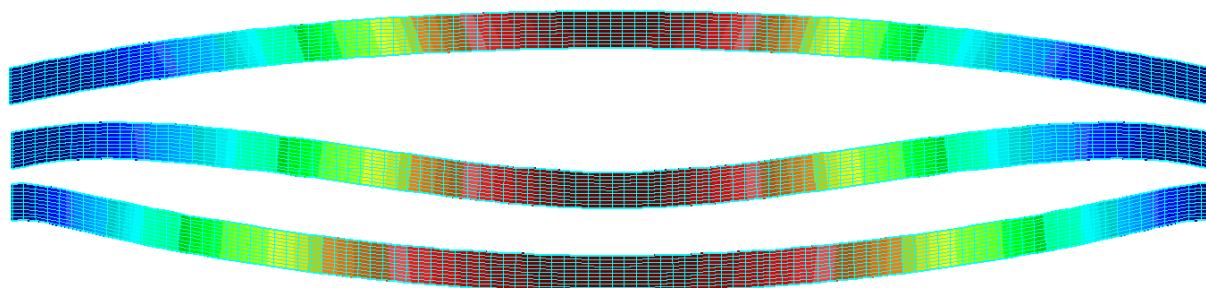
### Analiza nieliniowa ze względu na duże przemieszczenia

Analiza stateczności liniowej nie uwzględnia wpływów nieliniowości geometrycznej. Jak się okazuje, dla rozpatrywanego panelu konieczne jest przeprowadzenie analizy nieliniowej ze względu na duże przemieszczenia. Zależność mnożnika obciążenia (1kN/m) od przemieszczenia węzła środkowego panelu (p. Rysunek 31) przedstawia Wykres 4:



Wykres 4. Zależność mnożnika obciążenia od przemieszczenia węzła środkowego

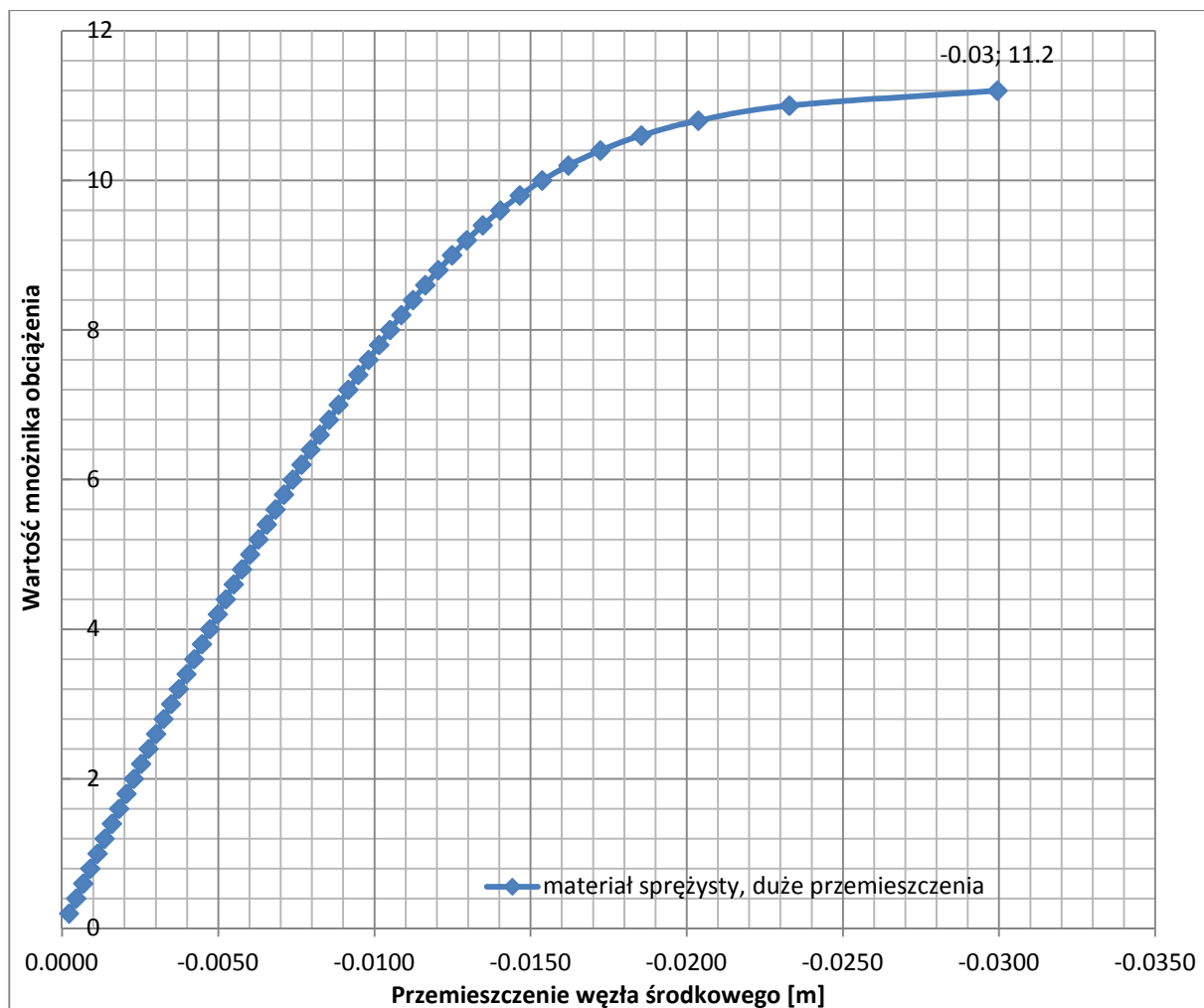
Z wykresu można wywnioskować, że przy pewnym obciążeniu (tutaj 11kN/m) panel traci swoją stateczność i jego przemieszczenia „gwałtownie” rosną – tzn. bez zwiększenia obciążenia (a nawet z możliwym jego małym zmniejszeniem) środek panelu przemieszcza się w dół o 45cm od położenia wyjściowego. Efekt tego przeskoku ukazuje Rysunek 35:



Rysunek 35. Przemieszczenie konstrukcji w fazie początkowej, w fazie przeskoku oraz fazie stabilnej w skali konstrukcji

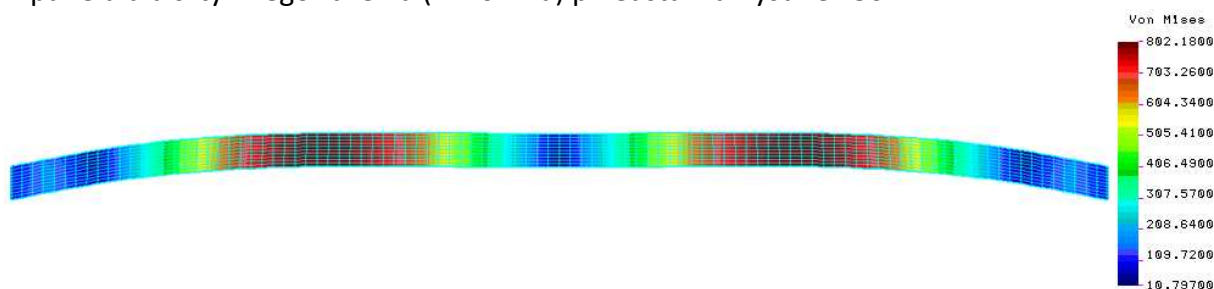
Po przeskoku konstrukcja może zostać obciążona jeszcze bardziej, jednak z praktycznego punktu widzenia jest to efekt niebezpieczny. Dlatego nie należy dopuścić, by obciążenie przekroczyło wartość krytyczną.

Poniżej, dodatkowo przedstawiono dokładniej zależność obciążenie – przemieszczenie w fazie przed przeskakiem:



Wykres 5. Zależność mnożnika obciążenia od przemieszczenia węzła środkowego przed przeskokiem

Przy okazji omawiania dużych przemieszczeń, poruszono temat naprężeń w rdzeniu. Naprężenia w rdzeniu są tym większe, im większa jego sztywność. Rozkład naprężeń Misesa w panelu dla sztywnego rdzenia ( $E=20\text{MPa}$ ) przedstawia Rysunek 36:



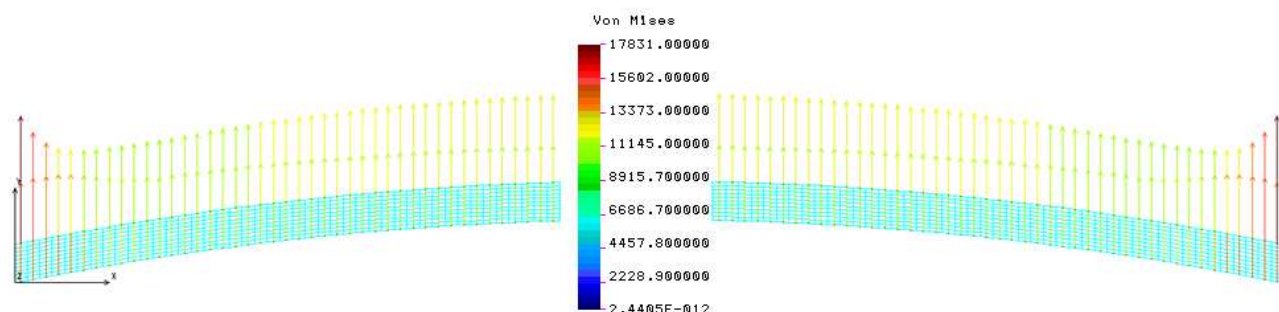
Rysunek 36. Naprężenia[kPa] w rdzeniu dla materiału rdzenia  $E=20\text{MPa}$ ,  $\nu=0.25\text{MPa}$  – przy obciążeniu krytycznym

Skala deformacji jest skalą rzeczywistą. Zatem widać, że panel znajduje się w fazie zaraz przed przeskokiem. Naprężenia w rdzeniu nie przekraczają  $1\text{MPa}$ , co zgadza się z przewidywaniami – zniszczenie rdzenia nie decyduje jako pierwsze o wyczerpaniu nośności.

### Analiza liniowa

Analiza liniowa to analiza statyczna teorii pierwszego rzędu. Obciążenie jest wprost proporcjonalne do naprężeń. Fakt ten wykorzystano do wyznaczenia, w zależności od

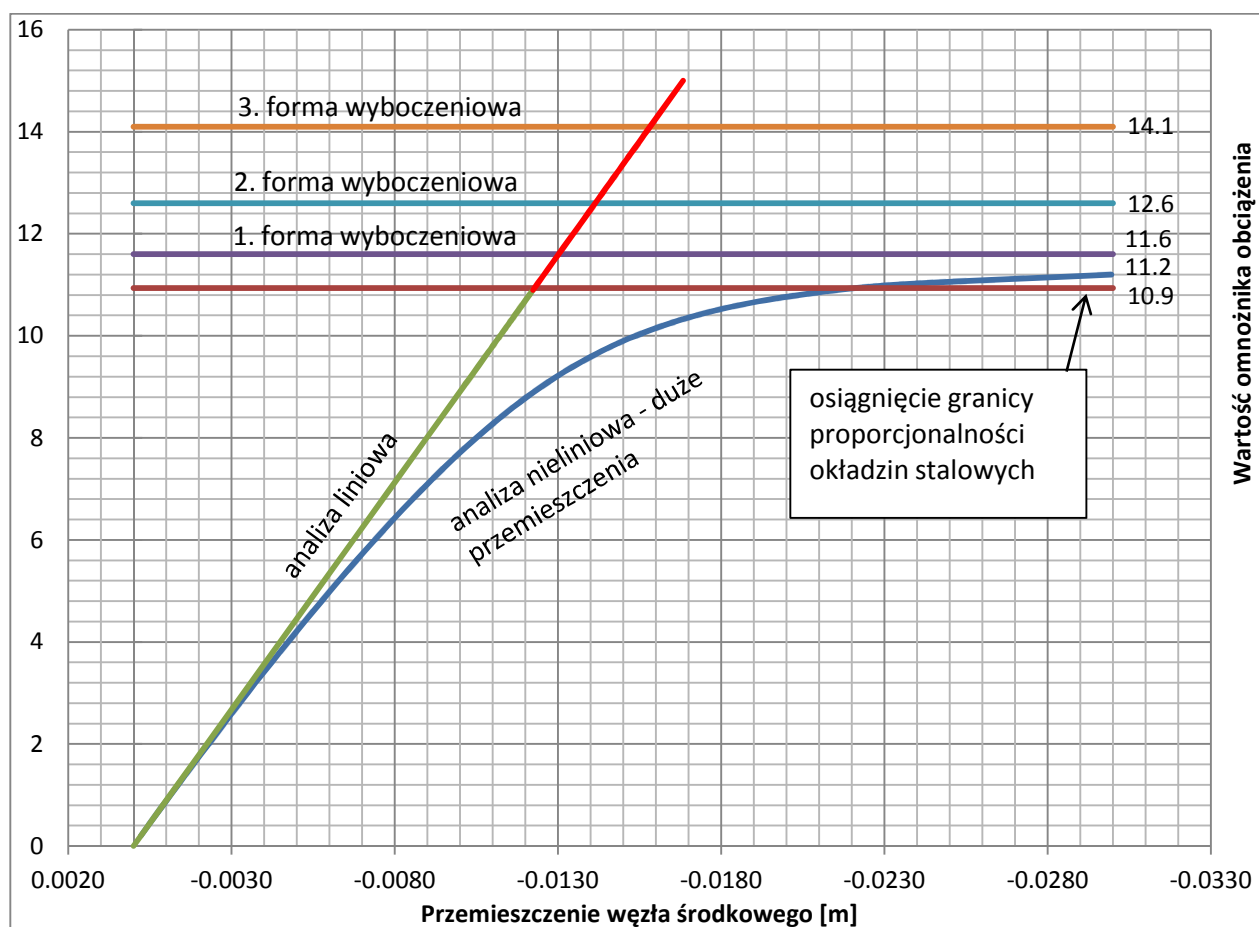
maksymalnych dopuszczalnych naprężeń w stali, mnożnika obciążenia. Dla rozważanego przypadku przy zadanym obciążeniu (niezrutowanym) 1kN/m odczytano maksymalne naprężenia w stali 17.831MPa (Rysunek 37). Stąd wiadomo, że przyjmując podaną granicę proporcjonalności naprężeń do odkształceń stali  $R_{eH} = 195MPa$ , mnożnik obciążenia, przy którym wystąpi przekroczenie tej granicy wynosi  $195/17.831 = 10.9$ .



Rysunek 37. Odczytanie maksymalnych naprężeń[kPa] w blasze trapezowej

## Zestawienie wyników dla analizowanego panelu

Wszystkie wyznaczone w poprzednich rozdziałach wyniki przedstawiono na jednym wykresie:



Wykres 6. Wartość mnożnika obciążenia krytycznego/granicznego z różnych analiz

Na podstawie powyższych danych można rozstrzygnąć, że analizą wyznaczającą nośność przykładowego panelu jest analiza liniowa. Wyczerpanie nośności wystąpi wskutek przekroczenia umownej granicy naprężeń w stali  $R_{eH} = 195 MPa$ . Wyniki przeprowadzonych analiz nie odbiegają znacznie od siebie, co wskazuje na konieczność ich dokonania w procesie projektowania panelu. Graniczną wartością obciążenia jest 10.9kN/m.

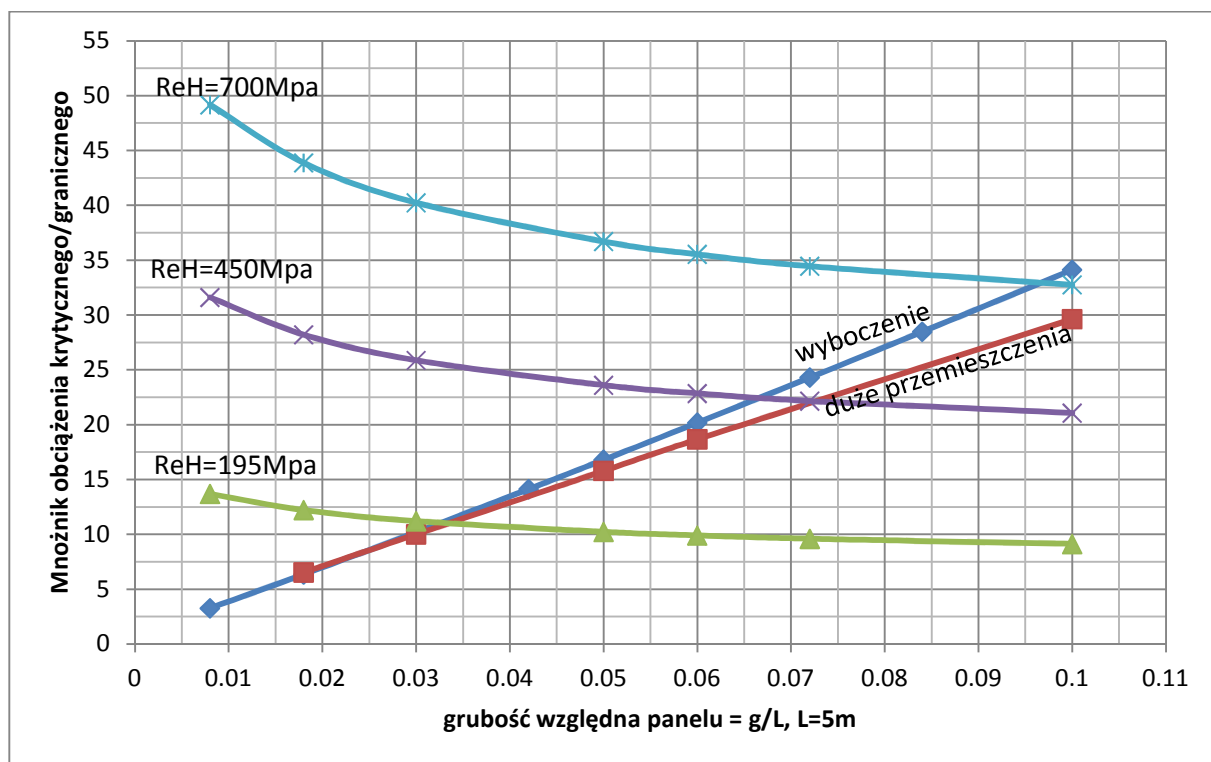
### Zestawienie wyników dla różnych przypadków materiałowo – geometrycznych

Przydatne z punktu widzenia praktycznego wydaje się określenie, którą analizę zastosować w celu stwierdzenia, kiedy następuje wyczerpanie nośności. Postąpiono analogicznie jak wcześniej (p. *Wykresy nośności ścian w zależności od smukłości oraz zastosowanego materiału rdzenia*), przeprowadzając w tym przypadku analizę MES modyfikując następujące parametry:

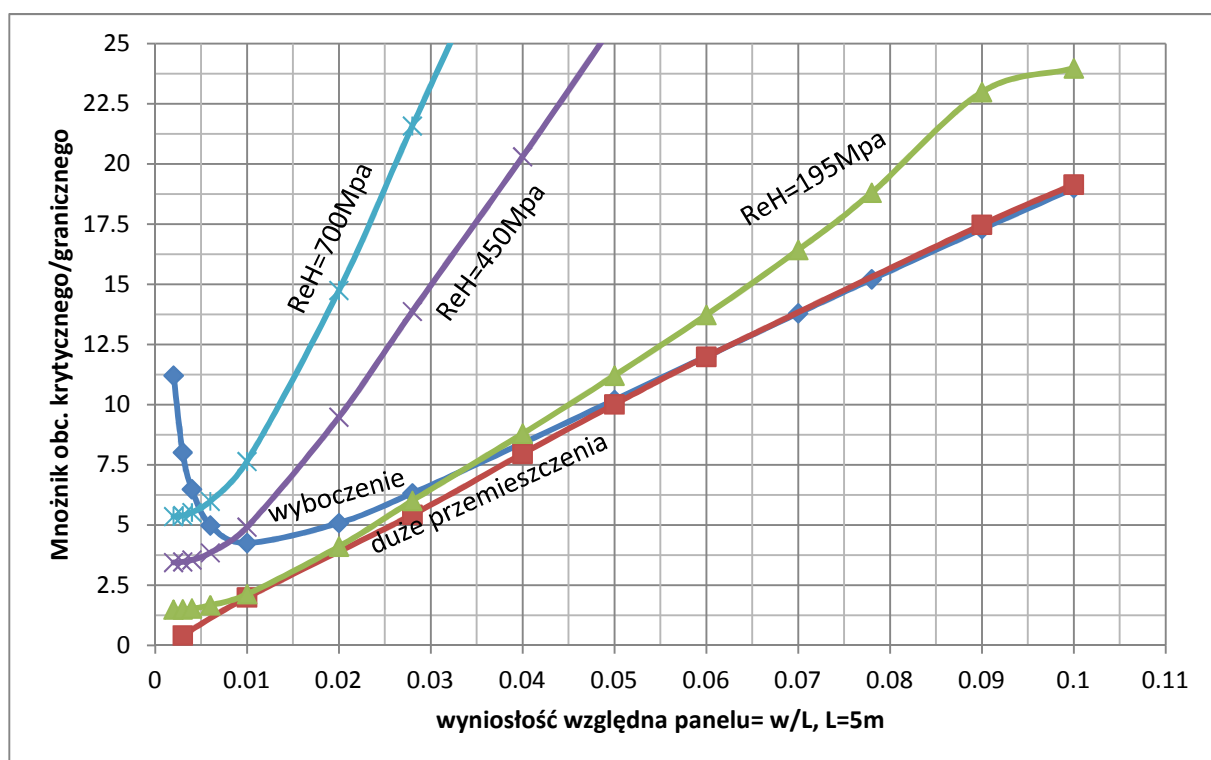
- grubość panelu
- wyniosłość panelu
- moduł Younga rdzenia
- wysokość blachy okładzin stalowych f

Domyślne wartości geometryczno – wytrzymałościowe pozostają bez zmian, z wyjątkiem modułu Poissona  $\nu_r = 0.25$  oraz, oczywiście, parametrów modyfikowanych.

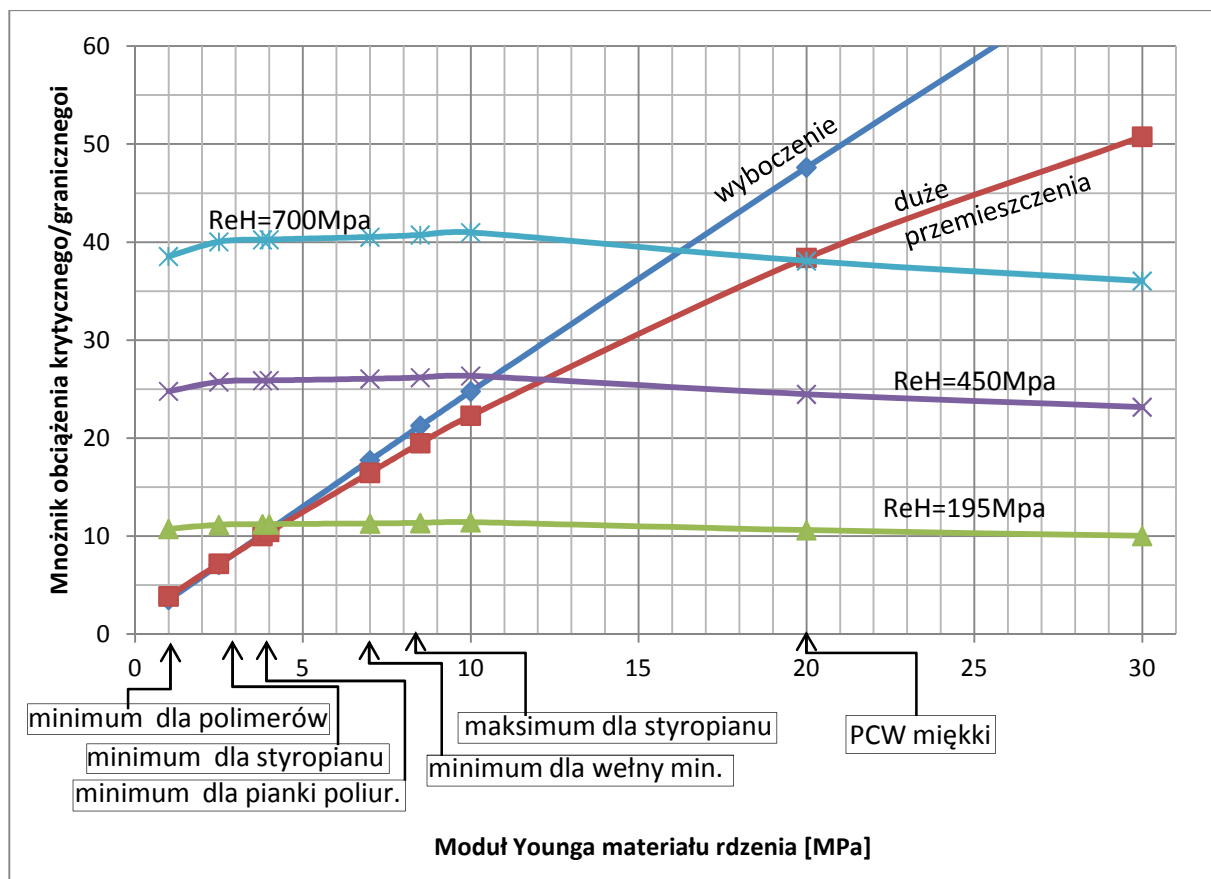
Dla wygody wizualnej interpretacji porównawczej przedstawiono najpierw wszystkie wykresy, następnie tabele ze współrzędnymi punktów wykresów, a dopiero w kolejnym rozdziale komentarze i wnioski. Puste komórki tabel to miejsca, gdzie wykonanie analiz MES było niemożliwe z przyczyn zastosowanych przez program algorytmów i ich parametrów.



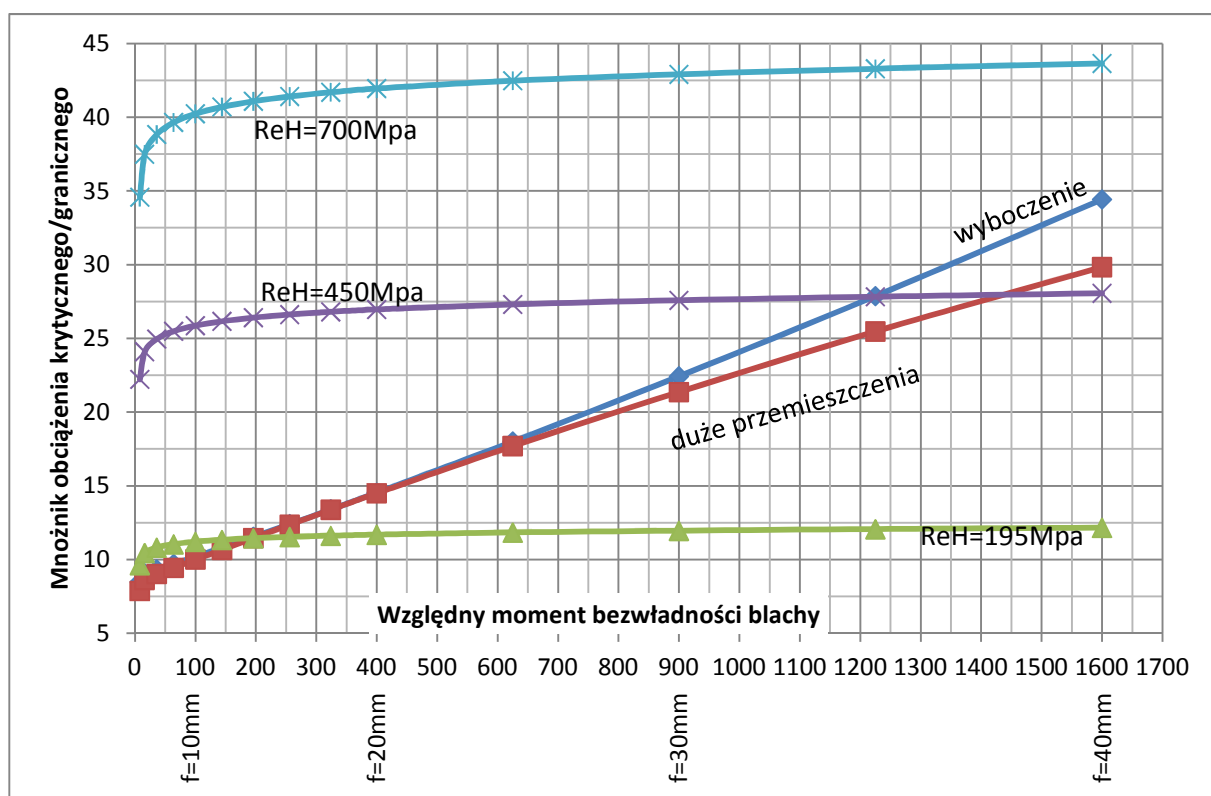
Wykres 7. Zależność nośności od względnej grubości (odwrotności „smukłości”) panelu w różnych analizach



Wykres 8. Zależność nośności od wyniosłości względnej panelu w różnych analizach



Wykres 9. Zależność nośności od modułu Younga materiału rdzenia panelu



Wykres 10. Zależność nośności od względnego momentu bezwładności blachy ( $f^2$ )



Tabela 7. Zależność nośności od względnej grubości(Wykres 7)

| g[m] | g/L   | mnożnik obciążenia krytycznego/granicznego |             |         |         |         | naprężenia[MPa]<br>w blasze przy<br>mnożniku 1 |
|------|-------|--------------------------------------------|-------------|---------|---------|---------|------------------------------------------------|
|      |       | wyboczenie                                 | duże przem. | ReH=195 | ReH=450 | ReH=700 |                                                |
| 0.04 | 0.008 | 3.26694                                    |             | 13.696  | 31.606  | 49.164  | 14.238                                         |
| 0.09 | 0.018 | 6.3588                                     | 6.5429      | 12.223  | 28.206  | 43.876  | 15.954                                         |
| 0.15 | 0.03  | <b>10.1953</b>                             | 10.014      | 11.209  | 25.868  | 40.239  | 17.396                                         |
| 0.21 | 0.042 | 14.1304                                    |             |         |         |         |                                                |
| 0.25 | 0.05  | 16.8006                                    | 15.796      | 10.225  | 23.597  | 36.707  | 19.070                                         |
| 0.3  | 0.06  | 20.1851                                    | 18.672      | 9.901   | 22.848  | 35.542  | 19.695                                         |
| 0.36 | 0.072 | 24.3074                                    |             | 9.598   | 22.150  | 34.456  | 20.316                                         |
| 0.42 | 0.084 | 28.4866                                    |             |         |         |         |                                                |
| 0.5  | 0.1   | 34.1263                                    | 29.63       | 9.125   | 21.059  | 32.758  | 21.369                                         |

Tabela 8. Zależność nośności od względnej wyniosłości(Wykres 8)

| w [m] | w/L   | mnożnik obciążenia krytycznego/granicznego |             |         |         |         | naprężenia[MPa]<br>w blasze przy<br>mnożniku 1 |
|-------|-------|--------------------------------------------|-------------|---------|---------|---------|------------------------------------------------|
|       |       | wyboczenie                                 | duże przem. | ReH=195 | ReH=450 | ReH=700 |                                                |
| 0.01  | 0.002 | 11.2076                                    |             | 1.491   | 3.441   | 5.353   | 130.762                                        |
| 0.015 | 0.003 | 8.01695                                    | 0.41395     | 1.503   | 3.468   | 5.394   | 129.768                                        |
| 0.02  | 0.004 | 6.48369                                    |             | 1.537   | 3.547   | 5.518   | 126.858                                        |
| 0.03  | 0.006 | 4.98518                                    |             | 1.667   | 3.847   | 5.985   | 116.963                                        |
| 0.05  | 0.01  | 4.25611                                    | 1.9959      | 2.128   | 4.912   | 7.641   | 91.617                                         |
| 0.1   | 0.02  | 5.0828                                     |             | 4.107   | 9.478   | 14.743  | 47.479                                         |
| 0.14  | 0.028 | 6.32062                                    | 5.4288      | 6.011   | 13.871  | 21.577  | 32.442                                         |
| 0.2   | 0.04  | 8.39932                                    | 7.9645      | 8.796   | 20.300  | 31.577  | 22.168                                         |
| 0.25  | 0.05  | <b>10.1953</b>                             | 10.014      | 11.209  | 25.868  | 40.239  | 17.396                                         |
| 0.3   | 0.06  | 12.0006                                    | 11.992      | 13.726  | 31.675  | 49.271  | 14.207                                         |
| 0.35  | 0.07  | 13.7942                                    |             | 16.427  | 37.908  | 58.967  | 11.871                                         |
| 0.39  | 0.078 | 15.2117                                    |             | 18.806  | 43.399  | 67.509  | 10.369                                         |
| 0.45  | 0.09  | 17.2975                                    | 17.475      | 22.987  | 53.047  | 82.518  | 8.483                                          |
| 0.5   | 0.1   | 18.9898                                    | 19.144      | 23.973  | 55.323  | 86.059  | 8.134                                          |

Tabela 9. Zależność nośności od modułu Younga materiału rdzenia(Wykres 9)

| Er [MPa]                                | mnożnik obciążenia krytycznego/granicznego |                                   |         |         |         | naprężenia[MPa]<br>w blasze przy<br>mnożniku 1 |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------|---------|---------|---------|------------------------------------------------|
|                                         | wyboczenie                                 | duże przem.                       | ReH=195 | ReH=450 | ReH=700 |                                                |
| 1.0                                     | 3.51305                                    | 3.8516                            | 10.736  | 24.776  | 38.540  | 18.163                                         |
| 2.5                                     | 7.09942                                    | 7.186                             | 11.152  | 25.736  | 40.034  | 17.485                                         |
| 3.8                                     | <b>10.1953</b>                             | 10.014                            | 11.209  | 25.868  | 40.239  | 17.396                                         |
| 4.0                                     | 10.6704                                    | 10.435                            | 11.214  | 25.878  | 40.255  | 17.389                                         |
| 7.0                                     | 17.7585                                    | 16.474                            | 11.287  | 26.046  | 40.516  | 17.277                                         |
| 8.5                                     | 21.2743                                    | 19.49                             | 11.344  | 26.178  | 40.721  | 17.190                                         |
| 10.0                                    | 24.7715                                    | 22.303                            | 11.416  | 26.344  | 40.979  | 17.082                                         |
| 20.0                                    | 47.6237                                    | 38.405                            | 10.606  | 24.475  | 38.072  | 18.386                                         |
| 30.0                                    | 69.626                                     | 50.764                            | 10.037  | 23.162  | 36.030  | 19.428                                         |
| <b>moduły Younga materiałów rdzenia</b> |                                            |                                   |         |         |         |                                                |
| Er= 1MPa                                |                                            | minimum dla polimerów             |         |         |         |                                                |
| Er=2.5MPa                               |                                            | minimum dla styropianu            |         |         |         |                                                |
| Er=3.8MPa                               |                                            | przykład zaczerpnięty z [9]       |         |         |         |                                                |
| Er=4.0MPa                               |                                            | minimum dla pianki poliuretanowej |         |         |         |                                                |
| Er=7.0MPa                               |                                            | minimum dla wełny mineralnej      |         |         |         |                                                |
| Er=8.5MPa                               |                                            | maksimum dla styropianu           |         |         |         |                                                |
| Er=20.0MPa                              |                                            | PCW miękki                        |         |         |         |                                                |

Tabela 10. Zależność nośności od względnego momentu bezwładności blachy(Wykres 10)

| f[mm]-wys.<br>blachy<br>trapezowej | mnożnik obciążenia krytycznego/granicznego |             |         |         |         | Naprężenia<br>[MPa] w<br>blasze przy<br>mnożniku 1 |
|------------------------------------|--------------------------------------------|-------------|---------|---------|---------|----------------------------------------------------|
|                                    | wyboczenie                                 | duże przem. | ReH=195 | ReH=450 | ReH=700 |                                                    |
| 2                                  | 8.48088                                    | 7.8805      | 9.633   | 22.230  | 34.580  | 20.243                                             |
| 4                                  | 9.06336                                    | 8.6392      | 10.445  | 24.103  | 37.493  | 18.670                                             |
| 6                                  | 9.33459                                    | 9.0387      | 10.818  | 24.965  | 38.835  | 18.025                                             |
| 8                                  | 9.70742                                    | 9.4476      | 11.046  | 25.490  | 39.651  | 17.654                                             |
| 10                                 | <b>10.1953</b>                             | 10.014      | 11.209  | 25.868  | 40.239  | 17.396                                             |
| 12                                 | 10.8046                                    | 10.674      | 11.338  | 26.164  | 40.700  | 17.199                                             |
| 14                                 | 11.54                                      | 11.468      | 11.445  | 26.412  | 41.085  | 17.038                                             |
| 16                                 | 12.4052                                    | 12.374      | 11.536  | 26.621  | 41.410  | 16.904                                             |
| 18                                 | 13.4041                                    | 13.39       | 11.615  | 26.805  | 41.696  | 16.788                                             |
| 20                                 | 14.5406                                    | 14.507      | 11.686  | 26.969  | 41.951  | 16.686                                             |
| 25                                 | 18.0099                                    | 17.707      | 11.834  | 27.309  | 42.481  | 16.478                                             |
| 30                                 | 22.4308                                    | 21.366      | 11.954  | 27.587  | 42.913  | 16.312                                             |
| 35                                 | 27.8767                                    | 25.474      | 12.060  | 27.831  | 43.293  | 16.169                                             |
| 40                                 | 34.4286                                    | 29.843      | 12.160  | 28.062  | 43.652  | 16.036                                             |

## Wpływ parametrów na formę wyczerpania nośności – interpretacja wykresów oraz wnioski

Na wszystkich wykresach (Wykres 7, Wykres 8, Wykres 9, Wykres 10) celowo uzależniono mnożnik obciążenia krytycznego/granicznego od określonych parametrów tak, by wykresy analizy wyboczenia oraz analizy nieliniowej ze względu na duże przemieszczenia były zbliżone do liniowych, co otwiera drogę dla wyznaczenia uproszczonych inżynierskich wzorów czy współczynników na nośność panelu. Stąd zamiast „smukłości” analizowana jest jej odwrotność, czyli grubość względna panelu oraz zamiast wysokości blachy trapezowej jej względny wskaźnik zginania. Należy pamiętać, że mnożnik obciążenia na wykresach dotyczy obciążenia 1kN/m (przed zrutowaniem na krzywiznę panelu). W kolejnych akapitach skomentowano osobno wykresy.

### Wykres 7

Na jego podstawie można stwierdzić, że dopuszczalne obciążenie wg analizy wyboczeniowej oraz nieliniowej jest proporcjonalne do grubości panelu. Rozpatrywane są grubości panelu od 4cm do 50cm. Dla bardzo grubych paneli różnica obciążeń krytycznych dla różnych analiz sięga 5kN/m. Mnożniki, wynikające z analizy nieliniowej są mniejsze niż te wynikające z analizy wyboczeniowej, a więc decydujące. Przy projektowaniu należy także sprawdzić naprężenia w okładzinach, ponieważ, jak widać, w zakresie grubości panelu większych od 15 cm oraz dostępnych na rynku gatunków stali może dojść do wyczerpania nośności wskutek uplastycznienia blach zewnętrznych.

### Wykres 8

Rozpatrywany zakres wyniosłości łuku to 1cm do 50cm. Dla wyniosłości poniżej 15cm występuje wyraźne zwiększenie obciążenia krytycznego analizy wyboczeniowej. Od wyniosłości 15cm wyniki analizy wyboczeniowej oraz nieliniowej są zbliżone. Uogólniając interpretację wykresu, dla rozpatrywanego panelu o utracie nośności będzie decydowała analiza nieliniowa, której wyniki są proporcjonalne do wyniosłości panelu.

### Wykres 9

Zwiększanie sztywności materiału rdzenia prowadzi do, mówiąc w przybliżeniu, proporcjonalnego przyrostu nośności krytycznej. Ograniczono się do materiałów o module Younga rdzenia nie większym niż 30MPa, ponieważ dla wyższych wartości należałoby uwzględnić także możliwość przekroczenia naprężeń w rdzeniu. Jak należało się spodziewać, im sztywniejszy rdzeń, tym bardziej prawdopodobne wyczerpanie nośności na skutek uplastycznienia okładzin. Różnica wartości obciążenia krytycznego dla analizy wyboczeniowej oraz nieliniowej może osiągnąć 10kN/m.

### Wykres 10

Wyjaśnienia wymaga pojęcie względnego momentu bezwładności blachy. Wskaźnik zginania 1 metra bieżącego blachy (oznaczenia - p. Rysunek 12) określony jest wzorem  $\frac{t f^2}{4}$ . Względny moment bezwładności odnosi się do blachy o wysokości  $f=1\text{mm}$ , zatem wyraża się wzorem:  $\frac{t f^2}{4} : \frac{t 1^2}{4} = f^2$  - stąd wartości na osi poziomej. Podobnie jak w poprzednich zależnościach, wyniki analiz wyboczeniowej oraz nieliniowej są proporcjonalne do modyfikowanego parametru – tutaj do  $f^2$ . Różnica między wartościami obciążenia krytycznego dał tych analiz sięga 5kN/m.

Znamienny jest fakt dotyczący obciążeń krytycznych – o nośności panelu decydują niemal zawsze wyniki analizy nieliniowej ze względu na duże przemieszczenia, nie zaś wyniki analizy wyboczeniowej. Jak zauważono na początku, wyznaczone przez nią obciążenie krytyczne jest w uproszczeniu wprost proporcjonalne do modyfikowanych parametrów.

## Podsumowanie i wnioski

W pracy magisterskiej wykazano konieczność stosowania teorii stateczności w analizie nośności trójwarstwowej ściany oraz panelu zakrzywionego. W przypadku ściany wystarczającym wyznacznikiem jest stateczność liniowa, zaś w przypadku panelu przy pewnych warunkach materiałowo – geometrycznych niezbędne jest zastosowanie teorii stateczności nieliniowej.

Dla ściany wykazano, że poprawne jest zastąpienie modelu MES 3D, modelem 2D oraz wyprowadzono ściśle wzory na siły wyboczeniowe w różnych przypadkach jej podparcia, których poprawność potwierdzono przy pomocy analizy MES. Dla obu obiektów przeprowadzono porównanie wyników obciążeń krytycznych oraz granicznych w zależności od różnych parametrów. Modyfikowano, w przypadku ściany: smukłość oraz moduł Younga materiału rdzenia, w przypadku panelu: grubość, wyniosłość, moduł Younga materiału rdzenia oraz moment bezwładności przekroju okładzin. Na podstawie obliczeń numerycznych MES powstały wykresy, będące najważniejszym efektem pracy, ułatwiającym intuicyjne zrozumienie „praw rządzących” konstrukcjami trójwarstwowymi:

- Wykres 2. Zależność mnożnika obciążenia krytycznego/granicznego od smukłości ściany
- Wykres 3. Zależność mnożnika obciążenia krytycznego/granicznego od modułu Younga rdzenia (dokładne wartości modułów zawiera Tabela 9)
- Wykres 7. Zależność nośności od względnej grubości (odwrotności „smukłości”) panelu w różnych analizach
- Wykres 8. Zależność nośności od wyniosłości względnej panelu w różnych analizach
- Wykres 9. Zależność nośności od modułu Younga materiału rdzenia panelu
- Wykres 10. Zależność nośności od względnego momentu bezwładności blachy ( $f^2$ )

Podsumowanie powyższych wykresów (zawarte w rozdziałach *Wykresy nośności ścian w zależności od smukłości oraz zastosowanego materiału rdzenia: Wnioski oraz Wpływ parametrów na formę wyczerpania nośności – interpretacja wykresów oraz wnioski*) może służyć jako zbiór praktycznych wskazówek do projektowania konstrukcji trójwarstwowych oraz podstawa do opracowania metod inżynierskich (uproszczonych wzorów, nomogramów). Ich powstanie mogłoby wykluczyć konieczność wykorzystywania programów obliczeniowych, a tym samym doprowadzić do upowszechnienia sposobów projektowania takich obiektów.

## Bibliografia

- [1] *encyklopedia.pwn.pl, Encyklopedia PWN*
- [2] *Wrzecioniarz J. A. - Interakcja stateczności globalnej i lokalnej w konstrukcjach trójwarstwowych, WPW, Wrocław 1990*
- [3] *steelprofil.eu, płyty warstwowe*
- [4] *PN-EN 14509:2010 Samonośne izolacyjno-konstrukcyjne płyty warstwowe z dwustronną okładziną metalową -- Wyroby fabryczne -- Specyfikacje*
- [5] *PN-B-03200:1990 Konstrukcje stalowe – Obliczenia statyczne i projektowanie*
- [6] *universal-stal.pl, producent blach stalowych*
- [7] *Capanidis D., Wieleba W. - Przegląd tworzyw sztucznych, [http://www.ikem.pwr.wroc.pl/pkmit/pliki/strony/pod%20strony/download/tworzywa/tasz2\\_wyklad\\_234.pdf](http://www.ikem.pwr.wroc.pl/pkmit/pliki/strony/pod%20strony/download/tworzywa/tasz2_wyklad_234.pdf), Wydział Mechaniczny Politechniki Wrocławskiej*
- [8] *Woźniak K., Materiały izolacyjne z tworzyw sztucznych Część III, <http://www.wseiz.pl/pliki/wyklady/kwozniak/termoizolacja/Czesc%203%20-%20Tworzywa%20sztuczne.pdf>*
- [9] *Pokharel N., Mahendran M. - Experimental Investigation and Design of Sandwich Panels Subject to Local Buckling Effects, Journal of Constructional Steel Research 59(12)*
- [10] *Szturomski B. - MES Podstawy metody elementów skończonych, AMW, Gdynia 2011.*
- [11] *Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M. - Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji, Arkady, Warszawa 1990*
- [12] *Zienkiewicz O. C. - Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.*
- [13] *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. - The Finite Element Method, Butterworth Heinemann, 2000*
- [14] *Romanów F. - Stateczność konstrukcji, WWSIWZG, Zielona Góra 1992*
- [15] *Gawęcki A. - Mechanika materiałów konstrukcji prętowych, IKB AlmaMater, 2003*
- [16] *Cosmos/M 2.5 Electronic Documentation, [www.cosmosm.com](http://www.cosmosm.com)*
- [17] *European convention for constructional steelwork - Preliminary European Recommendations for Sandwich Panels Part I Design, 1991*
- [18] *polonica.com.pl, producent pokryć dachowych i profili dla budownictwa*
- [19] *Bródka J., Garncarek R., Miłaczski K. - Blachy fałdowe w budownictwie stalowym, Arkady, Wrocław 1999*